

А. В. Плавко

**СПИН-ОРБИТАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ
РАССЕЯНИИ ПРОТОНОВ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ И
РЕЛЯТИВИСТСКИХ МОДЕЛЯХ**

**(О нерелятивистском и релятивистском формализме
в рассеянии протонов на ядрах)**

КУРС ЛЕКЦИЙ I (ОНЛАЙН)

A.V. Plavko

**SPIN-ORBIT INTERACTIONS AT PROTON SCATTERING IN
NONRELATIVISTIC AND RELATIVISTIC MODELS**

**(On Nonrelativistic and Relativistic Formalism at
Proton Scattering from Nuclei)**

ONLINE LECTURE COURSE I

**Санкт-Петербург 2019
St. Petersburg 2019**

А. В. Плавко*
Email: anatoliplavko@gmail.com

**СПИН-ОРБИТАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ
ПРОТОНОВ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ И
РЕЛЯТИВИСТСКИХ МОДЕЛЯХ
(О нерелятивистском и релятивистском формализме
в рассеянии протонов на ядрах)**

КУРС ЛЕКЦИЙ I (ОНЛАЙН)

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	с. 4
Лекция 1. Физические основания ряда применяемых моделей и представлений	
§ 1. Оптическая модель ядерных взаимодействий	с. 5
§ 2. О формализме без учета и с учетом спина частицы в неупругом рассеянии	с. 13
Лекция 2. Некоторые аспекты нерелятивистского формализма в неупругом рассеянии протонов	
§1. Взаимодействие нуклонов в свободном пространстве	с. 20
§2. Применение формализма взаимодействия нуклонов к процессу их рассеяния на атомных ядрах	с. 23
Лекция 3. О методе связанных каналов	с. 25
Лекция 4. Нерелятивистские и релятивистские подходы в изучении процессов рассеяния и ядерной структуры	с. 32
Лекция 5. Соотношения между формализмом уравнения Шредингера и уравнения Дирака	с. 39
Лекция 6. О конвертировании релятивистского уравнения в «шредингеровский эквивалент»	с. 46
Лекция 7. Релятивистские и нерелятивистские эффекты в рассеянии протонов	с. 53
Лекция 8. Специфические особенности рассматриваемых уравнений	с. 57
Лекция 9. Сопоставление аналитических подходов в релятивистском представлении упругого рассеяния протонов. Матрицы в релятивистском формализме	с. 62
Лекция 10. Деформационная модель в методе искаженных волн, основанном на релятивистском и нерелятивистском формализмах	с. 67
Лекция 11. Практическое применение деформационных моделей к неупругому рассеянию протонов	с. 71
Лекция 12. Оптическая модель ядра в неупругом рассеянии протонов с различными приближениями и интерпретациями	с. 78
Лекция 13. Применение некоторых элементов вышеизложенного формализма для анализа ряда экспериментальных данных по неупругому рассеянию протонов	с. 84
Список литературы	с. 93

* Докторский диссертационный совет по физике при Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого.

CONTENTS

Foreword	p. 4
Lecture 1. The physical foundations of the applied models and concepts	
§ 1. The optical model of nuclear interactions	p. 5
§ 2. On formalism with and without taking into account the spin of the particle in inelastic scattering	p. 13
Lecture 2. Some aspects of nonrelativistic formalism in inelastic proton scattering	
§1. Interaction of nucleons in free space	p. 20
§2. The application of nucleon interaction formalism to the process of their scattering from nuclei	p. 23
Lecture 3. On the method of coupled channels	p. 25
Lecture 4. Nonrelativistic and relativistic approaches in studying the processes of scattering and nuclear structure	p. 32
Lecture 5. Relations between the formalism of the Schrödinger and Dirac equations	p. 39
Lecture 6. On the transformation of the relativistic equation into the “Schrödinger equivalent”	p. 46
Lecture 7. Relativistic and nonrelativistic effects in proton scattering	p. 53
Lecture 8. Specific characteristics of the considered equations	p. 57
Lecture 9. The comparison of analytical approaches in the relativistic conception of inelastic proton scattering	p. 62
Lecture 10. The deformation model in the distorted-wave method based on relativistic and nonrelativistic formalisms	p. 67
Lecture 11. The practical application of deformation models to inelastic proton scattering	p. 71
Lecture 12. The optical model of the nucleus	p. 78
Lecture 13. The application of various elements of the above discussed formalism to the analysis of experimental data on inelastic proton scattering	p. 84
References	p. 93

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий курс лекций предназначен для студентов и других учащихся, специализирующихся в области экспериментальной ядерной физики и инженерии. Эти лекции могут быть своего рода учебным путеводителем по ряду элементов квантовой физики и прежде всего по связям квантовой механики нерелятивистской и релятивистской. Такой путеводитель, по мнению автора, должен в простой и доступной форме ликвидировать имеющийся пробел в учебной литературе.

В предисловии к своей известной книге «Физика ядра» (пер. на русский, 1964 г.) проф. М. Престон обращает внимание на важность подготовки студента к самостоятельной работе над периодической литературой. Автор следует этой же главной цели: заинтересовать учащегося в материале и тем самым «подтолкнуть» его к более глубокому самостоятельному чтению научных публикаций. По этой причине в настоящем курсе лекций приводятся многочисленные ссылки на оригинальные работы (на русском и английском языках). В практическом плане такой же подход автор применял и во время руководства многими дипломными работами (проектами) на физическом факультете СПбГУ и физико-механическом факультете СПбПУ. По существу, эти же принципы перенесены и в представляемом онлайн курсе лекций, который можно рассматривать как введение в современный модельный анализ результатов экспериментов в области ядерных реакций, включая рассеяние протонов на ядрах.

Настоящий курс лекций затем расширен и дополнен Курсом лекций II, часть А (см. онлайн на этом же сайте). В дальнейшем курс II будет продолжен.

FOREWORD

The present lecture course is aimed at undergraduate and other students studying experimental nuclear physics and engineering. These lectures may be used as a guide explaining a number of elements of quantum physics, primarily the relation between nonrelativistic and relativistic quantum mechanics. Such a guide, in the author's opinion, can eliminate the existing gap in the available scientific literature.

In the introduction to the well-known book "Physics of the Nucleus" (translated into Russian in 1964) Prof. M. A. Preston emphasized the importance of preparing students for independent navigation through scientific periodicals.

Keeping this in mind, the author provides numerous references to publications both in Russian and in English, in order to provoke students' interest to the material and involve them in active reading. Practically the same approach he tested in supervising students' course works and dissertations / projects, while working at the Physics Department of St. Petersburg State University and the Department of Physics and Mathematics of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

Similar principles are applied to the present online lecture course that can be considered as an introduction to modern model analysis of experimental data in the sphere of nuclear reactions, including proton scattering from nuclei.

Lecture Course I has been later expanded and complemented by Lecture Course II, Part A, which is also available online on this site. Lecture Course II will be continued in future.

ЛЕКЦИЯ 1

Физические основания ряда применяемых моделей и представлений

§ 1. Оптическая модель ядерных взаимодействий

В работах автора [1, 2] при рассмотрении аналитических аспектов рассеяния протонов некоторые методические положения были практически постулированы и детально не раскрыты. Сейчас к некоторым использованным там положениям мы возвращаемся, чтобы их конкретизировать и по-настоящему разъяснить.

В частности, из многих экспериментов известно, что налетающая и взаимодействующая с ядром частица, имеющая спин, изменяет свое состояние поляризации, т.е. направление спина. Этот факт показывает, что представляющий ядро некоторый потенциал (например, оптический) должен иметь компонент, зависящий от спина. Простейший зависящий от спина потенциал есть спин-орбитальный потенциал [3]. Возникает серьезный вопрос, а как это согласуется с теоретическими или модельными представлениями.

В общем случае процесс рассеяния нуклона на ядре чрезвычайно сложный ввиду того, то каждая налетающая частица может взаимодействовать с каждым нуклоном ядра мишени, и любое из этих взаимодействий должно описываться целым комплексом центральных, спин-орбитальных, обменных и тензорных компонентов [3]. Полностью описать взаимодействие даже только между нуклонами очень трудно. Описание того же взаимодействия между большим числом нуклонов без упрощающих предположений практически невозможно [3]. Возникает также вопрос: какие упрощения допустимы?

При низких энергиях, когда длина волны частицы становится сопоставимой с размерами ядра, логичнее рассматривать взаимодействие падающей частицы с ядром не в виде нуклон-нуклонного (NN) столкновения, а скорее – в форме взаимодействия падающей частицы с ядром как целым.

В настоящей лекции рассматриваются процессы (p, p') -рассеяния, в основном в энергетическом диапазоне $E_p = 150\text{--}500$ МэВ. Выделенная жирным знаком p (в литературе часто $\vec{p}$) означает определенную ориентацию спина в пространстве. Большой опыт в мировой практике показывает, что при этих значениях E_p , по крайней мере для неполяризованных протонов, вполне успешно может быть применена так называемая оптическая модель. В этой модели замена многочастичного ядерного взаимодействия двухчастичным комплексным нуклон-ядерным потенциалом производится по аналогии с описанием распространения света в преломляющей и поглощающей среде [3]. Именно от этого и происходит название этой модели. Она занимает промежуточное положение между оболочечной моделью ядра с очень слабым поглощением и моделью составного ядра с очень сильным поглощением [3].

В оптической модели рассматривается упругое рассеяние совместно с сопутствующими процессами поглощения. Считается, что с достаточной степенью приближения все эти процессы можно объединить в некоторый единый процесс, который выводит частицы из падающего пучка [3]. Таким образом, в оптической модели влияние нуклонов ядра-мишени, не принимающих непосредственного участия в неупругих процессах (или реакциях), сводится к созданию некоторого среднего комплексного потенциала, который действует как на падающую, так и на все возможные вылетающие частицы [4].

Естественно, что вслед за такими предположениями встает вопрос о моделировании оптического потенциала. В принципе для его радиальной зависимости $f(r)$ допускается немалое число различных аналитических форм [3], чему посвящено много работ, на которых мы здесь не будем останавливаться. Отметим лишь наиболее популярный способ, впервые предложенный Вудсом и Саксоном (Woods and Saxon), первые буквы фамилий которых часто используются для обозначения этих потенциалов (в англоязычной

транскрипции – WS или BC в русскоязычной транскрипции), когда зависимость $f(r)$ вещественной части оптического потенциала выбирается в форме, подобной радиальному распределению плотности ядра. Последняя с определенной параметризацией предложена Ферми. Хотя и этот способ считается достаточно произвольным [5], все же короткий диапазон ядерных сил дает основание для предположения, что действительная часть потенциала должна быть общей с ядерной плотностью. А за пределами ядра силы слабы или вообще отсутствуют.

Величина ядерного потенциала изменяется с энергией, а также при переходе от одного типа взаимодействия к другому сильнее, чем радиальная зависимость [6]. Исследования потенциалов приводят к целому большому разделу ядерной физики. В частности, показано, что при так называемых промежуточных энергиях протонов требуется серьезное отклонение от параметризации Вудса–Саксона [7].

Из квантовой механики известно [8], что рассеяние частиц в результате столкновения рассматривается как переход в состояниях непрерывного спектра из начального состояния i , соответствующего свободному движению с импульсом $\mathbf{p}_i = \hbar \mathbf{k}_i$ (где $\mathbf{k}$ – волновой вектор), в конечное состояние f с импульсом $\hbar \mathbf{k}_f$. Это происходит под влиянием оператора возмущения $U(\mathbf{r})$, который определяет энергию взаимодействия сталкивающихся частиц. В самом простом подходе начальное состояние движения может быть представлено плоской волной, т.е. в виде $\exp i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_i)$, где подразумевается нормировка на одну частицу в единице объема. Здесь $\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ есть волновая функция, характеризующая движущуюся частицу с импульсом $\mathbf{p}$, а $\mathbf{r}$ – радиус-вектор частицы. Это представление выполняется строго, только когда частица движется свободно, вне области действия сил. Но подобное упрощение можно допустить иногда как самое первое приближение при определенных условиях (например, достаточно высокие энергии, большие расстояния и др.). В приближении плоских волн конечное состояние движения можно привести к виду $\exp i(\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}_f)$. В другом приближении – нулевого радиуса ядерных сил имеем $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_f = \mathbf{r}$ и переданный импульс $\mathbf{q} \equiv \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$. Направление волнового вектора улетающей частицы $\mathbf{k}_f$ определяет угол рассеяния. Волновые векторы относятся к системе координат, в которой покоится центр инерции. Если происходит рассеяние одной частицы массы m_1 на другой частице m_2 , взаимодействие между которыми $U(\mathbf{r})$ зависит от относительной координаты $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, то в нерелятивистском приближении весь процесс сводится к задаче рассеяния фиктивной частицы, обладающей массой $\mu = m_1 \cdot m_2 / m_1 + m_2$ в потенциальном поле $U(\mathbf{r})$.

Обозначенные выше волновые функции относительного движения являются, как видно, экспонентами, возведенными в мнимую степень. Уместно вспомнить из математики, что «мнимую экспоненту» можно выразить тригонометрическим способом в пространстве – через синусы и косинусы (см., в частности, [9]). Исходя из этого легко представить аппарат теории рассеяния. Большую наглядность происходящего рассеяния могут дать также примеры, приведенные в [3] и показывающие поведение радиальной волновой функции в упругом рассеянии протонов заданной энергии на конкретном ядре. Там хорошо видно, что внутри ядерного поля и снаружи ядра волновая функция имеет колебательную форму, при этом на границе ядра лишь плавно меняется длина волны показанных колебаний.

Данные в [3] волновые функции являются решением уравнения движения частиц в рассматриваемом оптическом потенциале, т.е. решением волнового уравнения Шредингера. Полученные таким образом волновые функции называются искаженными волнами. Они описывают отражение, преломление и поглощение налетающих частиц [4]. Искаженные волны представляют собой «внешние» волновые функции, т.е. волновые

функции относительного движения, и их следует отличать от «внутренних» волновых функций, несущих информацию о ядерной структуре» [10].

Нашей основной целью здесь является изучение неупругого процесса. Существенная черта прямых переходов из одного канала (в частности, упругого рассеяния) в другой (например, неупругого рассеяния) состоит в предположении, что эти переходы обусловлены определенным потенциалом или псевдопотенциалом. Если при этом в качестве волновых функций в каждом канале используются плоские волны, то мы получим так называемое борновское приближение с плоскими волнами. Если в числе возможных каналов учитывается также и упругое рассеяние, то мы получим борновское приближение с искаженными волнами или, другими словами, метод искаженных волн (МИВ) [11]. Согласно этому приближению предполагается, что волны как падающей, так и улетающей частиц искажены некоторым средним взаимодействием с ядром-мишенью и остаточным ядром соответственно [12].

В рамках последнего приближения также считается, что имеется слабое взаимодействие – в том смысле, что помимо основного взаимодействия, приводящего к упругому рассеянию, существуют только малые возмущения. Кроме того, предполагается, что амплитуда перехода содержит взаимодействие, обуславливающее неупругое рассеяние, которое протекает только в одну стадию [10]. В противном случае мы обязаны прийти к иному методу, который должен «увязывать» разные процессы и называется методом связанных каналов (МСК). Для качественных оценок наблюдаемых процессов в случае значительных величин E_p мы иногда прибегаем к внешним волновым функциям в виде плоских волн. Однако в большинстве рассмотрений мы используем борновский метод искаженных волн. Тогда, согласно, например, [10], искаженные волны приобретают вид:

$$\chi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \text{рассеянная волна.} \quad (1.1)$$

В этом асимптотическом выражении обычно разделяют входящие или сходящиеся и выходящие (расходящиеся) волны. В итоге появляются следующие обозначения: $\chi_i^{(+)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{r})$ и $\chi_f^{(-)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{r})$, которые относятся к искаженным волнам, соответствующим падающей и улетающей частице. При этом заметим, что, как уже указывалось выше, в приближении нулевого радиуса ядерных сил имеем $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i \equiv \mathbf{r}_f$.

Оптическим потенциалом чаще всего служит тот, который правильно описывает упругое рассеяние. Согласно работе [10], нам приходится иметь дело с целой областью «экспериментальной» ядерной физики, которая рассматривает эффекты изменения форм и величин угловых распределений при варьировании параметров оптического потенциала в МИВ и МСК.

Оптический ядерный потенциал обычно представляется в виде суммы центрального и спин-орбитального. Так, например, в одной из достаточно ранних работ [13], где изучалось рассеяние протонов и нейтронов, использовался потенциал подобного типа.

Потенциал обычно содержит действительную и мнимую части. Действительная часть центрального потенциала имеет простую форму, доминирующую в объеме ядра. Это объясняется тем, что эта часть потенциала образуется главным образом короткодействующим нуклон-нуклонным (NN) взаимодействием между налетающим протоном и нуклоном мишени. Что же касается мнимых частей центрального и спин-орбитального потенциала, то они могут принимать те же формы, что и соответствующие действительные части потенциала, однако такие возможности не единственны.

Радиальная зависимость спин-орбитального потенциала обычно представляется при помощи градиента ядерной плотности, как показано, например, в [14,15]. Необходимость введения в эту часть оптического потенциала градиента плотности обусловлена не феноменологическими соображениями, а вызвана общими теоретическими требованиями

[15, 16]. В ряде работ, в частности в [14], была установлена радиальная зависимость спин-орбитального потенциала, исходя из предположения, что оптическая модель конструируется на основе суммы NN -взаимодействий. В результате такого подхода радиальная зависимость этой части оптического потенциала приобретает так называемую томасовскую форму [3], основанную на функции градиента.

Как будет видно из дальнейшего, в оптическом потенциале целесообразнее использовать не плотность $\rho(r)$, а функцию $f(r)$, имеющую общий характер с радиальной зависимостью распределения плотности в ядре. Эта функция будет представлять зависимость вещественной части оптического потенциала, т.е. будет служить формфактором этого потенциала. Так как $\rho(r)$ или $f(r)$ выбираются чаще всего постоянными внутри ядра и падающими до нуля на краю ядра, то их дифференциалы, естественно, будут иметь максимумы у поверхности ядра. Таким образом, спин-орбитальный оптический потенциал является поверхностным [17]. Эта часть потенциала может быть комплексной, хотя большинство результатов рассеяния при низких энергиях показывает, что она в основном является действительной при $E_p < 65$ МэВ.

Иногда радиальная зависимость мнимой части центрального оптического потенциала выбирается такой же, как и для вещественной части. В таком случае имеют в виду «объемное» поглощение [17]. Однако, подобно тому, как существуют веские причины предполагать, что спин-орбитальное взаимодействие сосредоточено в поверхностной области [3, 6, 17, 18], многие данные показывают, что и мнимая часть центрального оптического потенциала также может быть сконцентрирована на ядерной поверхности [3, 6]. Правда, предпочтение той или иной формы поглощения, которое представлено мнимой частью, должно зависеть от энергии налетающей частицы. Как и другие компоненты оптического потенциала, мнимая часть базируется на NN -взаимодействии. При значительных энергиях падающие частицы (протоны) проникают внутрь ядра. Доминирующее поглощение (т.е. выбывание из упругого канала) может происходить в результате NN -взаимодействия в ядре, поэтому такое поглощение должно определяться главным массивом распределения нуклонов в ядре, а, следовательно, это поглощение и моделируется плотностью основного состояния.

В то же время для мнимой части центрального потенциала возможен и поверхностный формфактор. Его особенно следует ожидать в том случае, когда доминирующие процессы, выводящие частицы из упругого канала, происходят на поверхности ядра. Это заметно при низких энергиях рассеивающихся протонов ($E_p \leq 20$ МэВ), когда важную роль играют коллективные возбуждения ядра в реакциях с передачей отдельных нуклонов. Имеются еще и другие аргументы в пользу преобладания поверхностной части мнимого потенциала при низких E_p .

С учетом рассмотренных аргументов мнимую часть оптического потенциала чаще всего и представляют в виде комбинации объемного и поверхностного потенциалов, причем с целью уменьшения свободных параметров радиальную зависимость поверхностного потенциала берут в виде производной от радиальной зависимости вещественной части [17]. Такую версию можно считать наиболее универсальной.

В области невысоких энергий (вплоть до 100 МэВ) экспериментальные данные согласуются с тем допущением, что спин-орбитальный потенциал в основном вещественный [17]. Важно при этом отметить, что из-за наличия спин-орбитального взаимодействия весь оптический потенциал $U(\mathbf{r})$ становится нецентральным потенциалом [17]. Он затем используется для того, чтобы в рамках квантомеханической теории столкновений сконструировать общий оператор энергии в уравнении Шредингера. Решение этого уравнения дает возможность найти возмущенные собственные функции этого оператора и связать их с эффективным сечением рассеяния (см., в частности, [15, 17, 19, 20, 21, 22]).

Известно, например, из [7] и многих других работ, что спиновые зависимости, влияющие на упругое рассеяние, могут быть представлены спин-орбитальным членом

оптического потенциала, действующего на ускоренную частицу. Было также установлено, что изменения, вносимые этой спин-орбитальной связью в искаженные волны, могут влиять заметным образом на спиновую поляризацию частиц, как падающих, так и вылетающих, в неупругих процессах или реакциях. В соответствии с этим представлялось важным учесть эту возможность в теории и включить ее в соответствующее программное обеспечение, предназначенное для анализа неупругого рассеяния частиц и ядерных реакций.

Назначение оптического потенциала $U(\mathbf{r})$, вообще говоря, является многофункциональным. Ниже в этой лекции мы обозначим две цели использования $U(\mathbf{r})$ в полном объеме или только его части, а затем укажем на другие, более широкие его предназначения.

В поле действия ядерного оптического потенциала (или, по крайней мере, его части) может попасть отдельный нуклон (например, протон), если он каким-то способом окажется выделенным из общей совокупности нуклонов ядра. Кроме того, подвергнуться влиянию $U(\mathbf{r})$ имеет возможность, в частности, также протон, прежде ускоренный, затем направленный на ядро и в итоге испытывающий столкновение с ядром. В обоих случаях используется потенциал, имеющий много сходных черт с $U(\mathbf{r})$, при теоретическом описании сформулированных здесь двух разных процессов. В самом деле, ядро разумно представить как ядерную материю переменной плотности, и в принципе такое приближение ведет к потенциалу оболочечной модели. Эффективное нуклонное взаимодействие в ядерной материи определяется величиной ядерной плотности, поскольку при переходе от центра ядра к его краю эффективный двухнуклонный потенциал должен непрерывно изменяться от потенциала для ядерной материи до потенциала в свободном пространстве (см., например, [18]). Итак, с одной стороны, мы рассматриваем нуклоны в ядре, на которые действует эффективный одночастичный потенциал, когда они находятся в основном или в низколежащих энергетических состояниях. С другой стороны, подобные вопросы надо решать и для другой задачи, а именно в том случае, когда нуклоны попадают внутрь ядра (или хотя бы на его периферию) и претерпевают рассеяние или вызывают какую-либо ядерную реакцию. В ограниченной области энергии падающих частиц вполне законно взять сходный одночастичный потенциал. Такой потенциал и используется в оптической модели ядерных взаимодействий [23].

Конечно, было бы желательно, чтобы единая основа двух разных (на первый взгляд) задач охватывалась единым квантовомеханическим формализмом. Конкретнее говоря, расчеты, касающиеся связанных состояний, выполнялись бы с учетом более общих потенциалов и тем же самым способом, что и в случае соответствующих расчетов по рассеянию [3]. Представляется, что такой единый формализм может быть построен на базе волнового уравнения Шредингера, описывающего движение частицы с массой m в силовом поле. Из квантовой механики известно [8, 20, 21, 24, 25], что там вводится (как обобщение опытных данных) стационарное (независящее от времени) уравнение Шредингера:

$$H\psi = E\psi \quad (1.2)$$

В случае указанной независимости от времени $H \equiv \hat{H}$ является оператором Гамильтона системы, совпадающей с оператором энергии, т.е. оператором, представляющим сумму операторов кинетической и потенциальной энергии для нерелятивистского движения частицы m в потенциальном поле $U(\mathbf{r})$. В связи с этим выражение (1.2) можно конкретизировать следующим образом:

$$H\psi(\mathbf{r}) \equiv \left[-\hbar^2 \Delta / 2m + \hat{U}(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (1.3)$$

Оператор кинетической энергии системы представлен оператором Лапласа $\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \text{div grad}$, который можно рассматривать как скалярное произведение самого на себя векторного оператора градиента $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ [21]. Оператор потенциальной энергии $\hat{U}$ (поскольку последняя есть функция только координат частицы) является просто $U(\mathbf{r})$. Смысл волновой функции ψ заключается в том, что она велика там, где нахождение частицы вероятно, и мала в остальных местах. Эта функция зависит от радиуса вектора $\mathbf{r}$, фиксирующего положение частицы. Функция ψ есть собственная функция оператора, а постоянный множитель E справа – соответствующее ей собственное значение. Вообще говоря, E – полная энергия системы, а в частном случае E представляет собой результат точных измерений полной энергии частицы.

Когда речь идет о взаимодействии частицы a и атомного ядра A , то нахождение волновых функций ψ_a из уравнения $H\psi_a = E\psi_a$ эквивалентно решению задачи многих тел. Поэтому вместо прямого рассмотрения этой очень сложной задачи прежде всего устанавливают некоторые закономерности для соответствующих конкретных процессов.

Если обеспечивается условие, при котором $E < 0$, тогда внешние силы (потенциальная энергия) удерживают частицу в некоторой области пространства, а уравнение (1.3) имеет решение только при некоторых определенных значениях E , образующих дискретный спектр. В результате частица остается локализованной в конечной области пространства, т.е. в связанном состоянии. Интеграл $\int |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$, распространенный на все конфигурационное пространство, сходится. Как известно, таким образом теоретически подтверждается один из фундаментальных экспериментальных фактов, а именно: квантование энергетических уровней связанных состояний [21].

Если же мы имеем ситуацию, при которой $E > 0$, то уравнение (1.3) может иметь решение при любых положительных значениях E , а это значит, что положительные энергии образуют непрерывный спектр. Соответствующие собственные функции не обращаются в нуль на бесконечности. Поэтому понятно, что модуль $|\psi(\mathbf{r})|$ волновой функции, являющейся решением уравнения (1.3), в этом случае стремится к конечной постоянной величине или осциллирует между значениями, из которых по крайней мере одно отлично от нуля. Частица не остается локализованной в конечной области [21]. Волновые функции этого типа служат для описания задач о столкновениях, когда частица может приходить из бесконечности и уходить в бесконечность. В результате мы имеем дело с частицей в несвязанном состоянии.

Последнее состояние называют еще «стационарным состоянием рассеяния» [21, 24], поскольку исторически это направление теории рассеяния развивалось по аналогии с упомянутой выше теорией связанных состояний ($E < 0$), т.е. с использованием стационарного формализма. В дальнейшем была развита и нестационарная теория рассеяния (см., например, [24]).

Нас будут интересовать собственные функции $\psi_E(\mathbf{r})$, относящиеся к тому или иному значению энергии E , и возможность применения этих функций для анализа наших экспериментальных данных. Во-первых, надо знать, что налетающая частица может «увидеть» в ядре, и здесь собственные функции дискретного спектра могут дать сведения о таких наблюдаемых величинах, как вероятности или формы квантовых переходов. Во-вторых, что касается собственных функций непрерывного спектра, то их асимптотическая форма самым прямым образом связана с эффективным сечением, характеризующим рассеяние [21]. В обоих случаях может быть использован сходный формализм, построенный на уравнении типа (1.3), где энергии E можно заранее задать, но, конечно, в обоих случаях они будут принципиально разные. Для нас сейчас самым важным обстоятельством является то, что, по крайней мере при не очень больших энергиях налетающих протонов E_p , оптический потенциал в случае рассеяния вполне может быть похож на эффективный одночастичный потенциал для связанных нуклонов. В обоих случаях потенциал должен содержать центральную и нецентральную часть, а также быть

непосредственно связанным с плотностью ядра. При этом производятся и некоторые упрощения. Одно из них состоит в том, чтобы превратить потенциал из нелокального в локальный, но сделать его непрерывно меняющимся в зависимости от энергии падающих частиц [23].

Разумеется, должно быть и некоторое существенное различие между этими двумя потенциалами. Самое главное из них заключается в том, что оптический потенциал рассеяния делается комплексным для учета поглощения. Мнимая часть оптического потенциала эффективно учитывает связь налетающего нуклона с внутренними степенями свободы ядра мишени. Эта связь проявляется в поглощении и приводит к затуханию одночастичного движения.

Итак, волновые функции связанного состояния для отдельного нуклона ядра могут быть найдены из решения уравнения Шредингера, т.е. генерированы потенциалом Вудса–Саксона для связанного состояния. Для этого в качестве потенциала берется реальная часть $U(r)$. А параметры потенциала устанавливаются из подгонки энергии связи нуклона в ядре как в основном, так и в возбужденных состояниях, что известно из эксперимента. Например, энергия связи протона из оболочки $2p_{1/2}$ в ядре ^{89}Y составляет $E(2p_{1/2}) = -7.71$ МэВ. Таким образом были найдены волновые функции, и в конечном счете с привлечением других данных решена задача (p, p') -рассеяния для некоторых состояний ядра ^{89}Y [26].

Вернемся к уравнению Шредингера (1.3) и будем его рассматривать в случае, когда собственное значение E является энергией относительного движения ($E > 0$). Таким образом, мы имеем задачу о рассеянии. Обычно ищут асимптотическую форму (при $r \rightarrow \infty$) решения волнового уравнения в виде (1.1), что означает добавление к первоначальному падающему пучку, представленному плоской волной, другой – расходящейся сферической волны, описывающей рассеяние. Удобнее рассматривать процесс рассеяния в системе центра масс, о которой речь шла в начале этого параграфа и где введено понятие приведенной массы μ . Тогда волновое число относительно движения

$$k = (2\mu)^{1/2} / \hbar \cdot E^{1/2}, \quad (1.4)$$

где E – энергия в системе центра масс, причем $E = m_2 / (m_1 + m_2) E_L$. Здесь E_L – кинетическая энергия падающей частицы в лабораторной системе, где мишень покоится.

Пока будем искать решение задачи о рассеянии на таких потенциалах, которые при $r \rightarrow \infty$ стремятся к нулю быстрее, чем $1/r$, т.е. при отсутствии в выражении (1.3) кулоновского поля или при предположении малости его влияния в асимптотической зоне. В соответствии с обозначениями (1.4) обычно преобразуется и уравнение Шредингера (см., например, [27, 28]), в которое вводятся другие (эквивалентные) величины: μ (вместо m) и k^2 (вместо E). Волновая функция относительного движения, представляющая собой решение уравнения (1.3), должна быть такой функцией, квадрат модуля которой пропорционален плотности частиц в пространстве (см., например, [29]). Согласно этому, следует искать функцию на больших расстояниях ($r \rightarrow \infty$). Она должна представлять собой пучок частиц, падающих на рассеивающий центр (ядро), а также добавление к первоначальному пучку еще и расходящейся сферической волны, описывающей рассеяние. Согласно [27], выражение (1.1) можно конкретизировать следующим образом:

$$\chi^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \rightarrow \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + f(\theta) \exp(ikr) / r, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{r} \rightarrow \infty$$

где индекс (+) в этом случае значит включение расходящейся волны (кроме первого слагаемого – плоской волны). Во втором слагаемом комплексная функция $f(\theta)$ описывает амплитуду волны, рассеянной на угол θ по отношению к направлению падающего пучка. В выражении (1.5) должен еще стоять общий коэффициент, представляющий собой

константу. В задачах о рассеянии он не играет принципиальной роли и выбирается из того или иного способа нормировки волновой функции [20].

В более общем случае функция $f(\theta)$ должна быть представлена в виде $f(\Omega)$, где телесный угол $\Omega = (\theta, \varphi)$ обозначает определенное направление движения. В выражении (1.5) функция $f(\theta)$ показана как независимая от угла φ из-за осевой симметрии ограниченной задачи. Действительно, пока мы рассматриваем только упругое рассеяние, при котором не изменяется квантовое состояние рассеивателя и не происходит передача энергии (связанной с его внутренними степенями свободы). Дифференциальное сечение упругого рассеяния в элемент телесного угла $d\Omega$ в направлении θ связано с амплитудой рассеяния $f(\theta)$ соотношением (см. [8, 20, 21, 22])

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega, \quad (1.6)$$

или, в соответствии с сокращенным обозначением, приводит к широко известному выражению:

$$d\sigma / d\Omega \equiv \sigma(\theta) = |f(\theta)|^2. \quad (1.6a)$$

Здесь мы концентрируем внимание в основном лишь на подходах оптической модели. Параметры ее оптического потенциала, в соответствии с многими работами, рассматриваются часто как параметры, определяемые феноменологически на основе анализа большого количества экспериментальных данных, в том числе по упругому рассеянию протонов.

Если мы имеем систему сталкивающихся частиц (в нашем случае это протон и ядро) с одним открытым каналом (или ролью других каналов можно пренебречь), то у нас происходит только упругое рассеяние. Как мы видим (1.6a), интенсивность упругого рассеяния определяется коэффициентом (квадратом его модуля) при расходящейся волне. В этом случае мы решаем задачу упругого рассеяния при помощи уравнения (1.3), которое генерирует волновые функции упругого рассеяния (искаженные волны), представленные выражением (1.5).

В более общем случае, когда открыто несколько каналов, асимптотика волновой функции системы также содержит плоскую волну, описывающую относительное движение сталкивающихся частиц и совокупность расходящихся волн, характеризующих рассеяние (упругое и неупругое) и различные реакции, которые соответствуют всем открытым каналам. Для нахождения вероятностей процессов рассеяния и протекания различных реакций необходимо знать коэффициенты при всех расходящихся волнах [17, 22, 24].

Указанные задачи также могут решаться при помощи уравнения Шредингера, но, конечно, гамильтониан станет слишком сложным, так что нахождение полной волновой функции эквивалентно решению задачи многих тел. В связи с тем, что эту задачу, строго говоря, прямым способом выполнить невозможно, приходится прибегать ко многим ухищрениям. Важнейшим моментом в наших исследованиях по-прежнему будет использование оптической модели и ее оптического потенциала. Однако из представленной выше оптической модели видно, что все наши усилия направлены прежде всего на решение задачи упругого рассеяния. Действительно, мнимые части компонентов (центрального и спин-орбитального) в оптическом потенциале формируются таким образом, чтобы в них вошли все без исключения процессы, выводящие частицы из упругого канала. Следовательно, в комплексный оптический потенциал вошли и «обезличились» также интересующие нас каналы неупругого рассеяния, в том числе и относящиеся к сильным коллективным возбуждениям в ядре.

Один из способов решения задач по неупругому рассеянию частиц состоит в том, что в общий гамильтониан системы включается такая его существенная часть, как $H_N(\xi)$ – гамильтониан ядра-мишени N , где ξ представляет собой внутренние координаты ядра (см., например, [1]). После этого ищется полная волновая функция системы $\psi(\mathbf{r}, \xi)$, которая теперь уже зависит не только от координат падающей частицы $\mathbf{r}$, как это было в уравнении (1.3), но и от внутренних координат мишени ξ . Далее предполагается, что волновая функция для каждого канала может быть адекватно описана при помощи суперпозиции состояний упругого и неупругого рассеяния. В результате выделяются задаваемые определенные каналы неупругого рассеяния, а остальные каналы, в том числе и каналы других реакций, учитываются в полной волновой функции общим путем, т.е. (как и в случае задачи по упругому рассеянию) при помощи введения комплексного оптического потенциала. Отметим, что среди указанных других реакций при изучении процессов (p, p) и (p, p') -рассеяния нередко хорошо наблюдаются, в частности, реакции (p, d) , (p, t) и др. Представленный подход одновременных расчетов по упругому и неупругому рассеянию приводит к обобщенной оптической модели, а сам способ математического разрешения задачи – к набору связанных дифференциальных уравнений для радиальных функций или, другими словами, к методу связанных каналов (МСК), изложенному детально, например, в работах [23, 24, 30–36].

§ 2. О формализме без учета и с учетом спина частицы в неупругом рассеянии

Кратко изложенный в предыдущей части лекции метод искаженных волн (МИВ) основывается на том, что реакция, в том числе и неупругое рассеяние, рассматривается как малое возмущение, накладываемое на упругое рассеяние. В МИВ любая из двухчастичных реакций представляется как переход, вызванный некоторым эффективным оператором взаимодействия, между состояниями упругого рассеяния. А последние состояния описываются волновыми функциями оптической модели (искаженными волнами), подобными тем, что представлены выражением (1.5) в начальных (входных) и конечных (выходных) каналах.

В связи с вышеизложенным формализм МИВ по существу очень сходный в двухчастичных ядерных реакциях и в неупругом рассеянии, в том числе и для их поляризационных эффектов [27]. Поэтому параметры оптического потенциала, получаемые из анализа (p, p') -рассеяния, практически используются одновременно для описания процессов, например (p, p') и (p, d) [37–39].

Обычно в МИВ исходят из того, что при столкновении со сложными ядрами энергия взаимодействия может быть представлена в виде суммы некоторого эффективного (оптического) потенциала $U_{opt} \equiv U$, определяющего, как уже отмечалось, упругое рассеяние, и «остаточного» потенциала $V_{ост}$ [15]. Последний имеет характер либо остаточного взаимодействия в оболочечной модели, либо матрицы реакции, либо взаимодействия с несферической частью деформированного оптического потенциала [40]. Часто для нахождения последнего потенциала используют следующий прием: из полного гамильтониана системы выделяют члены $U_{вз}$, т.е. ответственные за такое взаимодействие, которое приводит к переходам в ядре [41]. Взаимодействие $V_{ост}$, обозначаемое также как $U_{вз}$ или как V_{eff} и просто V , а в случае получения его посредством деформации оптического потенциала U логично представить это взаимодействие как ΔU . Оно вызывает возбуждение ядра и имеет природу переходного оператора.

Рассмотрим процесс неупругого рассеяния типа $A(a, a')A'$. Тогда для него в МИВ амплитуда перехода T имеет вид [8, 15, 17, 20–25]:

$$T = \int \int \chi_a^{(-)*}(\mathbf{k}', \mathbf{r}') \langle a'A' | V | aA \rangle \chi_a^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (1.7)$$

Здесь $\chi(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ – искаженные волны, описывающие упругое движение во входном и выходном каналах с относительными моментами $\mathbf{k}$ и радиусами $\mathbf{r}$, соответственно. Эти волны генерируются оптическим потенциалом, воспроизводящим наблюдаемое упругое рассеяние при той же энергии, и устанавливаются, например, в результате подгонки расчетов, выполненных по оптической модели, к экспериментальным данным упругого рассеяния. Включенное в амплитуду выражение в угловых скобках представляет (в дираковском обозначении *бра* и *кет* [20]) матричный элемент взаимодействия, взятый по внутренним состояниям φ_i сталкивающихся пар. Угловые скобки обозначают интегрирование по всем координатам, которые независимы от относительных координат $\mathbf{r}$ (во входном канале) и $\mathbf{r}'$ (в выходном канале). Рассматриваемый матричный элемент

$$\langle a'A' | V | aA \rangle = \int \varphi_a^* \varphi_{A'}^* V \varphi_a \varphi_A d\varepsilon \quad (1.7a)$$

чаще всего называют ядерным формфактором. Он играет роль эффективного взаимодействия, которое вызывает переходы между состояниями упругого рассеяния χ_a и $\chi_{a'}$. Если $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ различны, это взаимодействие нелокально. Формфактор содержит всю информацию о ядерной структуре, правилах отбора угловых моментов и даже о типе реакции (неупругое рассеяние, *knock-on*, т.е. выбивание, реакция срыва и др.). При помощи ядерного формфактора в рамках той или иной компьютерной программы можно изучать разнообразие ядерных моделей и типы ядерных реакций ([27] и др.). Например, в неупругом рассеянии ядро-мишень возбуждается и переходит из состояния φ_A в состояние $\varphi_{A'}$.

Самое существенное упрощение, допускаемое в МИВ, заключается в том, что здесь не ищется точная волновая функция системы, а вводится волновая функция относительного движения налетающей частицы a и ядра A (взаимодействие между которыми описывается потенциалом U), и эта функция на бесконечности представляется в виде суммы плоской и расходящейся сферической волны. Из-за отсутствия строгого обоснования в теоретическом плане приближение МИВ некоторые авторы склонны рассматривать только как удобную аппроксимацию (см., например, [17]).

Что касается указанного выше ядерного формфактора (1.7a) или, в нашем случае, формфактора неупругого перехода, представляющего собой матричный элемент перехода в ядре, то его аналог включен и в формализм МСК [30].

В выражение (1.7) входят $\chi^{(+)}$ и $\chi^{(-)*}$ – искаженные волны. При этом первая волна $\chi^{(+)}$ представляет собой решение уравнения Шредингера с потенциалом U и с граничными условиями, согласно которым в случае больших радиусов это решение обращается, как уже отмечалось выше, в плоскую волну и расходящуюся сферическую волну (1.5). Функция $\chi^{(-)*}$ может рассматриваться как решение задачи о рассеянии с потенциалом U^* , где значок $*$, как и в других случаях, указывает на комплексное сопряжение той или иной мнимой величины. Решение последней задачи имеет асимптотическую форму в виде плоской волны и сходящейся сферической волны [44].

Вообще волновые функции типа $\psi^{(-)*}$ можно формально получить из соответствующих функций $\psi^{(+)}$. Для этого надо перейти от функции $\psi^{(+)}$ к комплексно сопряженной функции, а затем в полученном выражении заменить знак аргумента этой функции [15]. Подобная процедура основана на инвариантности гамильтониана относительно обращения времени (см., например, [17]). Это можно понять из следующего соображения. Пусть плоская волна $\exp(ikz)$, характеризующая свободную частицу, распространяется в направлении z . «Обращенной во времени» является волна, движущаяся

в противоположном направлении, т.е. $\exp(-ikz)$. При этом оба решения являются комплексно-сопряженными. Следовательно, можно ожидать, что в общем случае обращение времени связано с взятием комплексно сопряженной волновой функции [22]. В результате оказывается [27], что искаженная волна $\chi^{(-)*}$ равняется расходящейся волновой функции относительного движения, но с обратным знаком волнового вектора $\mathbf{k}$:

$$\chi^{(-)*}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \chi^{(+)}(-\mathbf{k}, \mathbf{r}), \quad (1.8)$$

т.е. для подобного преобразования в (1.5) вместо $\exp(ikr)$ нужно просто взять $\exp(-ikr)$.

Однако ситуация усложняется при наличии спина у сталкивающихся частиц. В этом случае обращение времени не является просто эквивалентным взятию комплексно-сопряженной волновой функции. *Это можно объяснить тем, что спин во многих отношениях эквивалентен круговому току.* Если изменить знак времени, то тогда ток будет течь в обратном направлении, и, следовательно, изменится и ориентация спина [22].

Волновая функция частицы, имеющей спин (собственный момент), определяется не только пространственными координатами, но и спиновой переменной, т.е. $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{s})$. В результате того, что для свободной частицы пространственные координаты и спиновая переменная независимы, волновую функцию такой частицы можно представить в виде произведения пространственной и спиновой волновых функций [17, 42]:

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \psi(\mathbf{r}) \cdot \zeta(\mathbf{s}), \quad (1.9)$$

т.е. пространственные и спиновые координаты разделены.

При наличии спина волновая функция первичного (падающего) пучка должна быть записана как произведение плоской волны (собственной функции оператора импульса) и спиновой функции ζ , которая характеризует спиновое состояние частицы и мишени. Аналогично и рассеянная волна должна содержать информацию о спинах. Если, как указано выше, ζ – спиновая функция до рассеяния, то $\zeta'(\theta, \varphi)$ – обобщенная спиновая функция после рассеяния ζ . Здесь φ , как и θ , обозначают угловые координаты. Тогда волновое уравнение типа (1.3), которое имеет асимптотическое решение, подобное (1.5), получит новое решение уже в следующем виде [17, 42]:

$$\psi \approx \zeta \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \zeta'(\theta, \varphi) \exp(ikr) / r. \quad (1.10)$$

Приблизительное равенство здесь означает, что оно выполняется с точностью до нормировочного коэффициента.

Известно (например, из [20]), что спиновая координата отличается от пространственных координат. Суть различия заключается в том, что для частицы (или комплекса частиц, например ядра) со спином s спиновая координата принимает только $(2s+1)$ значений, тогда как пространственная координата может принимать бесконечное число значений. Поэтому так называемое *спиновое пространство* состоит из конечного числа точек, а волновые функции, такие как ψ , становятся матрицами в этом пространстве.

Как известно, в качестве спиновой переменной можно выбрать значение проекции спина частицы на определенное направление [17]. Спиновое состояние частицы со спином

$1/2$ (например, протона) можно представить спинором Паули $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Для любого такого

состояния имеется направление $\boldsymbol{\mu}$, которое указывает спин – в том смысле, что если ось z выбрать параллельно $\boldsymbol{\mu}$, то спинор Паули будет иметь $a_2 = 0$ [43].

Спиновую часть волновой функции пучка частиц со спином $1/2$ можно записать в виде вектора-столбца с двумя компонентами, каждый из которых определяет амплитуду и

фазу возможного типа поляризации (или ориентацию спина) [25]. Так, например, волновая функция $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ может описывать состояние, в котором вероятность того, что спин направлен «вверх», равна $|a|^2$, а вероятность того, что он направлен «вниз» – $|b|^2$ [23]. Если в процессе рассеяния участвуют две частицы со спином 1/2 и 0, то полная асимптотическая волновая функция (1.10), которая удовлетворяет уравнению Шредингера с рассеивающим потенциалом, теперь принимает вид [42]:

$$\psi \approx \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \begin{pmatrix} u(\theta, \varphi) \\ v(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \exp(ikr)/r, \quad (1.11)$$

где a и b – постоянные (нормированные так, что $|a|^2 + |b|^2 = 1$), описывающие спин падающей волны, а u и v – комплексные функции углов рассеяния θ и φ . Спиновая функция $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ не нормирована, а ее квадрат описывает интенсивность рассеянного пучка. Функция f , введенная в выражениях (1.5–1.6а), теперь приобретет более сложный вид [42]:

$$|f(\theta, \varphi)|^2 = |u(\theta, \varphi)|^2 + |v(\theta, \varphi)|^2. \quad (1.12)$$

Дифференциальное поперечное сечение при каждом угле θ можно представить следующим образом [42]:

$$d\sigma / d\Omega = |f|^2 = |u|^2 + |v|^2. \quad (1.13)$$

Проблема рассеяния двух частиц со спинами 1/2 и 0 рассматривается при помощи матрицы рассеяния F . Для случая, описываемого соотношением (1.11), матрица рассеяния определяется следующим образом [42]:

$$\begin{pmatrix} u(\theta, \varphi) \\ v(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = F(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Однако для подобных целей может использоваться также и несколько иной подход, основанный на операторной амплитуде рассеяния или реакции $\hat{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ (см. [17]). В этом случае исходные соотношения остаются принципиально теми же, что в (1.9) и (1.10). Просто асимптотика волновой функции для рассеяния принимает несколько другой вид:

$$\psi_{k s \mu}(\mathbf{r}, \sigma) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + r^{-1} \exp(ikr) \hat{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\} \mathfrak{a}_{s \mu}(\sigma), \quad (1.15)$$

где $\hat{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ – операторная амплитуда рассеяния, σ – спиновая переменная, а $\mathfrak{a}_{s \mu}$ – спиновая функция начального состояния, т.е. то же самое, что и ζ в (1.9) и (1.10). Так же, как и ζ' в (1.10), функция $\mathfrak{a}'$, получаемая в результате действия оператора $\hat{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ на начальную спиновую функцию $\mathfrak{a}_{s \mu}$, т.е.

$$\mathfrak{a}' = \hat{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \mathfrak{a}_{s\mu}, \quad (1.16)$$

может рассматриваться как обобщенная спиновая функция частицы со спином s после рассеяния. Таким образом, оператор рассеяния $\hat{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ переводит начальное спиновое состояние $\mathfrak{a}_{s\mu}$ в конечное спиновое состояние $\mathfrak{a}'$. Амплитуда $\hat{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ является матрицей в спиновом пространстве, т.е. по существу играет ту же роль, что и приведенная в (1.14) матрица рассеяния $F(\theta, \psi)$. Раскладывая спиновую функцию $\mathfrak{a}'$ по полному набору функций $\mathfrak{a}_{s\mu'}$, устанавливаем, что

$$\mathfrak{a}' = \sum_{\mu'} \langle \mu' | \hat{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') | \mu \rangle \mathfrak{a}_{s\mu'}, \quad (1.17)$$

где $\langle \mu' | \hat{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') | \mu \rangle$ – амплитуда упругого рассеяния, сопровождающегося изменением проекции спина частицы (μ – проекция спина в начальном состоянии и μ' – проекция спина в конечном состоянии). Далее выясняется [17], что не только в случае рассеяния, но и в случае реакции оператор типа $\hat{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ устанавливает общую связь между начальной ($\mathfrak{a}$) и конечной ($\mathfrak{a}'$) спиновыми функциями системы.

Таким образом, удастся понять, что если взаимодействующие частицы имеют спин, а компонент потенциала, ответственный за спин-орбитальную связь, включен в общий оптический потенциал $U(\mathbf{r})$, то функции χ , генерируемые уравнением Шредингера и приобретающие вид (1.11) или (1.15), становятся матрицами в спиновом пространстве $\chi_{\mu'\mu}$, где μ является компонентом спина вдоль оси z . Члены с $\mu' \neq \mu$ допускают возможность спин-флипа в процессе упругого рассеяния. В этом случае применение принципа обратимости времени приводит выражение типа (1.8) уже к более сложной связи [28]:

$$\chi_{\mu',\mu}^{(-)*}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = (-1)^{\mu-\mu'} \chi_{-\mu', -\mu}^{(+)}(-\mathbf{k}, \mathbf{r}). \quad (1.18)$$

Итак, мы установили, хотя и в достаточно схематической форме, что с целью формирования амплитуды перехода для неупругого рассеяния T_{fi} (1.7) можно найти искаженные волны (1.18).

Важным элементом формфактора неупругого перехода (1.3) является оператор V или $U_{вз}$, как отмечалось выше. Если судить со строго теоретических позиций, то считается, что в процессе неупругого рассеяния при низких и средних энергиях по существу не известны ни величина операторов V , ни их зависимость от спина, и, следовательно, сами эти операторы должны, вообще говоря, определяться из экспериментальных данных. Для рассеяния нуклонов на ядрах при более высоких энергиях (например, тех, которые принято называть промежуточными) имеется надежда, что в качестве хорошего первого приближения можно использовать для этих целей амплитуду рассеяния двух свободных нуклонов, при этом и спиновую зависимость оператора взаимодействия можно считать известной [4]. Если энергия налетающих нуклонов относительно велика (по сравнению с ядерными энергиями связи), то становится, по-видимому, справедливо импульсное приближение. В этом случае оператор V возможно заменить t -матрицей, которая описывает рассеяние двух свободных частиц.

Из проведенных рассмотрений в рамках МИВ в общем выясняется, что с точки зрения описания в процессе $(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ -рассеяния можно отдельно учесть влияние двух потенциалов: U и V или двух частей одного эффективного взаимодействия. При этом первая часть представлена оптическим потенциалом, определяющим упругое рассеяние, а вторая часть – остаточным потенциалом ($V_{осм} \equiv V$). Каждый из этих потенциалов или каждая часть

эффективного взаимодействия включает, вообще говоря, компонент, содержащий спин. Таким образом, спиновая зависимость, влияющая на $(\mathbf{p}, p')$ -рассеяние, может быть разделена, по крайней мере, на две основные составляющие.

С учетом спиновых степеней свободы выражения (1.7–1.7а) приобретают, естественно, более сложный вид. Эти аспекты были рассмотрены нами детально, и с ними можно ознакомиться в нашей работе [1].

Как уже отмечалось, упрощение механизма неупругого рассеяния происходит по мере увеличения E_p . В частности, при достаточно высоких энергиях можно надеяться, что искажение волн не имеет большого значения [4]. Тогда рассеянными волнами, представленными вторым слагаемым в выражениях (1.1, 1.5, 1.10, 1.11 и 1.15), можно пренебречь [27]. В итоге в выражении для амплитуды перехода T (1.17) искаженные волны заменяются плоскими волнами, образуя под интегралом множитель, который в отсутствие спинов у частиц приобретает простой вид [40]:

$$\exp \left[i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_i) - i(\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}_f) \right] = \exp i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}), \quad (1.19)$$

где $\mathbf{q} \equiv \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$, если V имеет нулевой радиус действия. При наличии спинов у частиц искаженные волны достигают «плосковолновых пределов» [27]:

$$\chi_{\mu'\mu}^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \delta_{\mu'\mu} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (1.20)$$

Второй множитель в правой части (1.20) является, как следует из (1.1), плоской волной. Она описывает состояние свободного движения частицы, которой мы сообщаем (при помощи ускорителя) импульс $\mathbf{p}$ или $(\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k})$. А первый множитель в правой части (1.20) – дельта-функция, свойства которой хорошо известны в математике и физике (детально и ясно изложено в книге [20]).

Пока мы использовали часто применяемое координатное представление. При этом энергия взаимодействия выражается функцией от координат, и в координатном представлении она совпадает с соответствующим оператором, что видно из выражения (1.3). В то же время при исследовании систем, состоящих из слабо взаимодействующих частиц, нередко бывает полезным применение импульсного представления, в котором операторы координаты и импульса могут изображаться либо непрерывными матрицами, либо функциями от импульсов и производных по импульсам. Проиллюстрируем это примером, следуя работе [15]. В координатном представлении, как известно, операторами проекций импульса движущейся частицы являются:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \partial / \partial x, \hat{p}_y = -i\hbar \partial / \partial y, \hat{p}_z = -i\hbar \partial / \partial z. \quad (1.21)$$

В векторной форме выражение (1.21) приобретает сокращенный вид:

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla, \quad (1.22)$$

где ∇ (набла) – оператор градиента. Но в импульсном представлении действие оператора импульса на функции сводится к умножению этих функций на значение импульса, что в трехмерном случае значит:

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}. \quad (1.23)$$

Следовательно, в этом представлении в операторе Гамильтона H (1.3), в соответствии с (1.22, 1.23), вместо $-\hbar^2 \Delta \equiv \hbar^2 \nabla^2$ должно появиться просто p^2 . Имеет место также целый

набор функций, преобразующий координатное представление в импульсное и наоборот [15].

С точки зрения экспериментаторов более естественным является использование координатного пространства. В то же время рассмотрение ряда явлений в импульсном пространстве немедленно обобщается на релятивистские задачи рассеяния, что весьма проблематично для других методов, основанных на координатных волновых функциях [24]. С учетом вышесказанного уравнение Шредингера (1.3) обычно приводится к следующему виду (см., в частности [45]):

$$(p^2 - k^2 - 2\mu U_{opt})\chi^{(+)} = 0. \quad (1.24)$$

Здесь μ – приведенная энергия налетающей частицы:

$$\mu = \gamma(m^2 + k^2)^{1/2} \cdot (M^2 + k^2)^{1/2} / (M + m + E_p). \quad (1.25)$$

Здесь k – точное релятивистское волновое число в рамках нуклон-ядерного столкновения:

$$k = \gamma [E_p(E_p + 2m)]^{1/2} \cdot [1 - (m + E_p) / (M + m + E_p)], \quad (1.26)$$

где
$$\gamma = 1 / [1 - E_p(E_p + 2m) / (M + m + E_p)^2]^{1/2}, \quad (1.27)$$

а m , M и E_p , соответственно, представляют собой массу налетающей частицы, массу ядра мишени и энергию протонов в падающем пучке.

Если во входном и выходном каналах вместо искаженных волн (1.18) в выражениях для амплитуды перехода типа (1.7) в порядке приближения использовать плоские волны (1.20), которые в импульсном пространстве превращаются просто в δ -функцию, что как раз и видно из (1.20), то многие выражения, касающиеся неупругого рассеяния, приводятся вообще к простому виду [17].

Так, в плосковолновом пределе импульсного приближения дифференциальное поперечное сечение неупругого рассеяния протонов в случае изоскалярных переходов с нормальной четностью может быть представлено непосредственно через изоскалярную переходную плотность ядерной материи $\rho_J(q)$ в импульсном пространстве и так называемое собственное поперечное сечение σ_{00} . Тогда дифференциальное сечение неупругого рассеяния можно представить следующим образом [45]:

$$\sigma(q) \equiv d\sigma / d\Omega = 4\pi(\mu / 2\pi)^2 [(2I_f + 1) / (2I_i + 1)] |\rho_J(q)|^2 \cdot \sigma_{00}, \quad (1.28)$$

где I_i и I_f – спины мишени в начальном и конечном (возбужденном) состояниях, а μ – приведенная энергия частицы. В выражении (1.28)

$$\sigma_{00} \equiv |t_m(q)|^2 = |t^C(q)|^2 + |t^{LS}(q)|^2. \quad (1.29)$$

Как видно из (1.28), дифференциальное сечение $\sigma(q)$ пропорционально квадрату переходной плотности ρ_J . Та же квадратичная зависимость от ρ_J свойственна и вероятности частично-дырочных коллективных и неколлективных переходов в ядре [46]. Кроме того, поперечное сечение также пропорционально величине σ_{00} или $|t_m(q)|^2$ (1.29). Последний квадратичный член представляет собой форму, в которой выражено взаимодействие в ядерной материи [45]. В выражениях (1.28, 1.29) значение q следует из

(1.19), а эффективное «взаимодействие» (t_m) состоит из центральной (C) и спин-орбитальной (LS) частей. Здесь используются модули компонентов изоскалярного «взаимодействия» как функции q для нуклон-ядерных реакций. Это «взаимодействие» может быть сконструировано на основе, например, t -матрицы для свободного нуклон-нуклонного взаимодействия [47]. Отметим также, что t^C и t^{LS} , являясь центральным изоскалярным независимым от спина и, соответственно, изоскалярным спин-орбитальным взаимодействием, могут включать обменный член в импульсном q -пространстве.

Итак, мы пока сосредоточили внимание на том, что в плосковолновом пределе импульсного приближения поперечное дифференциальное сечение, как функция q , очень чувствительно к распределению переходной плотности $\rho_j(q)$. Действительно, как видно из (1.28), поперечное сечение пропорционально по существу квадрату продольного формфактора, измеряемого в неупругом рассеянии электронов, т.е. переходной плотности в q -пространстве [47, 45].

ЛЕКЦИЯ 2

Некоторые аспекты нерелятивистского формализма в неупругом рассеянии протонов

§1. Взаимодействие нуклонов в свободном пространстве

В амплитуду неупругого рассеяния T в рамках МИВ (1.7) в качестве множителя включается ядерный матричный элемент, который формально можно определить как $\langle f|V|i\rangle$, где i обозначает начальное состояние, а f – конечное. Он также появляется и в связывающих членах МСК (как показано ниже). Будем считать, что $V = \sum_i V_{ip}$. Здесь i относится уже к нуклонам мишени. В [48–50] предполагается, что падающий протон p взаимодействует с активными i нуклонами мишени посредством локального, действительного и центрального двухчастичного взаимодействия. Это взаимодействие часто рассматривается как оператор, связывающий конфигурации оболочечной модели ядра [49–50]. Пусть r_{ip} – расстояние между двумя нуклонами (ядерного и налетающего), а $g(r_{ip})$ – радиальный формфактор взаимодействия, $\mathbf{r}_i$, σ_i – координаты и спин i -того нуклона ядра, а $\mathbf{r}_p$, σ_p – координаты и спин налетающего нуклона.

Если произвести традиционное мультипольное разложение радиального формфактора взаимодействия $g(r_{ip})$ в координатах $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_p$, то получим:

$$g(r_{ip}) = 4\pi \sum_{LM} g_L(r_i, r_p) Y_L^M(\theta_i, \varphi_i) Y_L^M(\theta_p, \varphi_p). \quad (2.1)$$

При этом прежде всего достигается разделение взаимодействия на радиальную (g_L) и угловые части (Y_L^M) в 2.1. Первый из сомножителей зависит только от радиуса, а второй – только от углов (детально см. [20, 27, 28]). Каждый член соответствует передаче орбитального углового момента L ядру и отвечает изменению четности $(-1)^L$. Значение же M (верхнего индекса в угловых функциях Y), представляющее определенную проекцию спина, прояснится в дальнейшем при изложении вопросов ядерной структуры.

Общий угловой момент передачи окажется $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, где $\mathbf{S}$ – спиновой момент. Тогда $S = 0$ ($J = L$) соответствует одному (простому) члену взаимодействия, а $S = 1$ ($J = L \pm 1$) –

другому (более сложному) члену взаимодействия. Последний член с передачей спина $S = 1$ непосредственно отвечает за процесс спин-флипа. Если рассматривать четно-четные ядра, то $I_i = 0$ и $J = I_f$. Нормальные состояния, для которых четность равна $(-1)^J$, возбуждаются с передачей $L = J$, а состояния с аномальной четностью, для которых имеем $(-1)^{J+1}$, возбуждаются с передачей $L = J \pm 1$. Спин-независимое ($S = 0$) взаимодействие не возбуждает состояния с аномальной четностью. В общем случае спин-флиповое взаимодействие должно быть значительно слабее, чем взаимодействие, независимое от спина.

В полумикроскопических и микроскопических подходах в МИВ, помимо простой амплитуды прямого перехода, можно учесть и обменные процессы. Последние, в частности, могут принадлежать к так называемому типу *knock-on*, когда налетающий протон захватывается ядром, а протон мишени, наоборот, испускается. Возможность учета обменных вкладов открывает дополнительные перспективы, в то время как макроскопическому подходу обменный процесс в явном виде не свойствен в принципе. Он может быть учтен только эффективно.

Отметим, что спиновая и изоспиновая зависимости в рассматриваемом здесь подходе ограничиваются лишь простым скалярным произведением спин-спиновой формы [51]. Вместе с тем, если к рассеянию нуклонов промежуточных энергий применить импульсное приближение, то там вполне закономерно появляется спин-орбитальная зависимость эффективного взаимодействия. Эта зависимость очень важна при описании возбуждаемых состояний нормальной четности. В случае возбуждения уровней аномальной четности для описания подобных характеристик требуются еще и тензорные компоненты взаимодействия.

Было накоплено большое количество данных при низких значениях E_p , когда для одних из них были вполне допустимы, а для других совершенно неприемлемы коллективные модели, используемые в МИВ или МСК. Поэтому целесообразно рассмотреть и применить для неупругого рассеяния более полный формализм конструирования двухчастичного взаимодействия. Так, согласно, например, работам [34, 41, 47], оператор V , вызывающий ядерный переход и основанный на двухчастичном взаимодействии, может быть представлен, в частности, следующим выражением:

$$V = \sum_i t_{ip} = \sum_i \left[V_{ip}^{(S)} + V_{ip}^T S_{ip} + V_{ip}^{(SO)} \mathbf{L}_{ip} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ip} \right]. \quad (2.2)$$

Здесь верхние индексы S , SO и T обозначают, соответственно, скалярную, спин-орбитальную и тензорную части взаимодействия. В этом выражении S_{ip} – тензорный оператор, $\mathbf{L}_{ip}$ – оператор орбитального углового момента и спиновой вектор $\boldsymbol{\sigma}_{ip} = \boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{\sigma}_p$.

Представление (2.2) практически равносильно тому, что к центральному взаимодействию для частицы со спином $1/2$ мы добавили члены нецентрального взаимодействия [52, 53]:

$$-V_T g_T(r_{ip}) S_{ip} - V_{LS} g_{LS}(r_{ip}) \mathbf{L}_{ip} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{\sigma}_p), \quad (2.3)$$

где $g_r(r_{ip})$ и $g_{LS}(r_{ip})$ – соответственно, радиальные формфакторы для тензорного и спин-орбитального компонентов двухчастичного взаимодействия. По-прежнему $r_{ip} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p|$, где $\mathbf{r}_p$ характеризует положение центра масс налетающей частицы.

Остановимся более подробно на двухчастичном спин-орбитальном взаимодействии, которое происходит между двумя частицами: 1 и 2. Это взаимодействие двух нуклонов можно представить следующим образом:

$$V_{ls}(1,2) = \sum_T V_T g^T(r_{12}) Q_T(2\mathbf{L}_{12} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{12}), \quad (2.4)$$

где $\sigma_{12} = \sigma_1 + \sigma_2$, $\sigma_i = (2/\hbar) \mathbf{s}_i$, а Q_T выражается через $\tau_i = 2t_i$. Здесь $\mathbf{s}_i(t_i)$ – оператор спина (изоспина) для частицы i . Величина для части $T = 0$ ($T = 1$) спин-орбитальной силы представлена коэффициентом V_T , а $g^T(r_{12})$ – соответствующая радиальная форма. T связано с передачей изоспина в прямом неупругом рассеянии. В выражении (2.4) также использован оператор орбитального углового момента L_{12} , который в (2.2) и (2.3) обозначен через L_{ip} . Представим L_{12} более детально и тогда, согласно [52], получим:

$$L_{12} = (1/2\hbar) (\mathbf{r}_i - \mathbf{p}_i) \times (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \quad (2.5)$$

где $\mathbf{r}_1$ – радиусы-векторы взаимодействия или векторы координат, а $\mathbf{p}_1$ – векторы импульсов взаимодействующих частиц. Фактически L_{12} является $L_{отн}$, т.е. относительным орбитальным моментом двух частиц.

Как известно [21], импульс на квантовом языке представляется дифференциальным оператором, т.е. $\mathbf{p} \rightarrow (\hbar/i)\nabla$, что уже было отражено нами в лекции 1. Тогда вместо (2.5) мы получим:

$$L_{12} = (1/2) [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\nabla_1 - \nabla_2) / i]. \quad (2.6)$$

Для того чтобы детализировать это выражение в рассматриваемом формализме микроскопической теории, напомним математическую формулу, представляющую оператор градиента (см., например, [34]).

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} d/dr - (i/r)(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) \equiv (\mathbf{r}/r) d/dr - (i/r^2) \mathbf{r} \times \mathbf{L}. \quad (2.7)$$

Подставим выражение (2.7) в (2.6), а затем, ориентируясь на формулу (2.4), получим двухчастичное спин-орбитальное взаимодействие в микроскопическом представлении в указанном ниже виде:

$$V_{is}(1,2) \rightarrow V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \{ \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + i (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) [1/r_2] d/dr_2 - (1/r_1) d/dr_1 \} + \\ + (1/r_2^2) \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{L}_2) + (1/r_1^2) \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{L}_1) \} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2). \quad (2.8)$$

Правда, хотя здесь детально расписан множитель $(2L_{12} \cdot \sigma_{12}) \equiv 2L_{12}(\sigma_1 + \sigma_2)$, входящий в (2.4), в целом выражение (2.4) является более полным, поскольку оно содержит еще и дополнительный множитель $V_T Q_T$, а также суммирование по T .

Проанализируем различие в формулах (2.4) и (2.8) подробно, но вначале подумаем об общем выражении для двухчастичного взаимодействия. В действительности отдельный двухнуклонный потенциал V_{ip} зависит не только от относительного расстояния между нуклонами $\mathbf{r}_{ip} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p$ и векторами спина σ_i и σ_p , как в (2.3), но также зависит и от векторов изотопического спина τ_i и τ_p . Поэтому в более полном виде выражение для V_{ip} должно представляться следующим образом [17]:

$$V_{ip} = - [V_{00} + V_{01}(\tau_i \tau_p) + V_{10}(\sigma_i \sigma_p) + V_{11}(\sigma_i \sigma_p)(\tau_i \tau_p)] g(r_{ip}). \quad (2.9)$$

Как видно, здесь мы имеем дело не только с простым центральным (необменным), но также и с обменным взаимодействием. Их радиальные зависимости, определяемые радиальным формфактором $g(r_{ip})$, предполагаются в первом приближении одинаковыми [17].

В случае *необменного* рассеяния, когда возбуждение уровней ядра происходит без передачи изотопического спина, проекция изотопического спина рассеиваемого нуклона сохраняется. Тогда при рассмотрении протонов мы имеем [17]:

$$(\tau_i \tau_p) = 1, \text{ если частица } i - \text{ тоже протон} \quad (2.10)$$

или же

$$(\tau_i \tau_p) = -1, \text{ если частица } i - \text{ нейтрон,} \quad (2.11)$$

где индекс p по-прежнему относится к рассеиваемому протону. В результате выражение (2.9) упрощается, если произвести следующие замены [17]:

$$V_0 = V_{00} \pm V_{01} \quad \text{и} \quad V_1 = V_{10} \pm V_{11}. \quad (2.12)$$

Конечно, в полном рассмотрении следует учесть процессы прямого рассеяния нуклонов с перезарядкой. За такие переходы как раз и ответственна часть потенциала (2.9), зависящая от изотопических спинов взаимодействующих нуклонов [17]. А общее влияние изотопического спина (в том числе на нецентральные компоненты) отражено в выражении (2.4).

§2. Применение формализма взаимодействия нуклонов к процессу их рассеяния на атомных ядрах

Для рассеяния нуклонов простое, но достаточно полное взаимодействие, которое согласуется с амплитудой свободного нуклон-нуклонного рассеяния, должно содержать компоненты центральные (как независимый от спина, так и зависимый от него) и нецентральные (тензорный и спин-орбитальный). Взаимодействие налетающего нуклона с ядром можно представить, как указывалось выше, в виде суммы двухчастичных нуклон-нуклонных потенциалов. Эта сумма приобретает в координатном пространстве следующий вид [54]:

$$\begin{aligned} V_{NN} = & V_{00}^C(r) + V_{01}^C(r) \tau_1 \cdot \tau_2 + V_{10}^C(r) \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \\ & + V_{11}^C(r) \sigma_1 \cdot \sigma_2 \tau_1 \cdot \tau_2 + [V_0^T(r) + V_1^T(r) \tau_1 \cdot \tau_2] S_{12} + \\ & + [V_0^{LS}(r) + V_1^{LS}(r) \tau_1 \cdot \tau_2] L_{12} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где τ_1, τ_2 и σ_1, σ_2 – соответствующие изотопические и спиновые векторы, составленные из матриц Паули (см., в частности, [1, 8, 15, 17, 20] и др.), а S_{12} и L_{12} – тензорный оператор и оператор орбитального углового момента. Индексы C, T и LS обычно вводятся для обозначения центральной, тензорной и спин-орбитальной частей потенциалов.

Если рассматривать процесс рассеяния приближенно (без передачи изотопического спина), то с учетом (2.10, 2.11) выражение (2.13) упрощается и приобретает вид:

$$\begin{aligned} V_{NN} = & V_0^C(r) + V_1^C(r) \sigma_1 \cdot \sigma_2 + V^T(r) S_{12} + \\ & + V^{LS}(r) L_{12} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь по аналогии с (2.12) введено:

$$\begin{aligned}
V_0^C &= V_{00}^C \pm V_{01}^C, \\
V_1^C &= V_{10}^C \pm V_{11}^C, \quad V^T = V_0^T \pm V_1^T \text{ и} \\
V^{LS} &= V_0^{LS} \pm V_1^{LS}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Здесь знак (+) или (–) относятся к тому, какое из двух взаимодействий, $(p-p)$ или $(p-n)$, описывает потенциал (2.14).

Мультипольное разложение радиального формфактора двухчастичного взаимодействия $g(r_{ip})$ представлено выше выражением (2.1). Это разложение приобретает простые аналитические формы для ряда случаев. Довольно универсальной формой, выбранной первоначально для того, чтобы обеспечить аналитичность для мультипольного разложения (2.1), оказалась так называемая юкавская форма [22]. Она ведет к юкавскому потенциалу [25]. В нашем конкретном случае это означает, что в формуле (2.9) мы теперь можем конкретизировать формфактор и привести к широко известному простому виду:

$$g(r_{ip}) = \exp(-\alpha r_{ip}) / \alpha r_{ip}, \tag{2.16}$$

где α – константа (параметр определенного диапазона радиусов). Достаточность подобного простого выбора подтвердил анализ многих экспериментальных данных.

Разумеется, что аналитические методы существенно упрощаются, если считать, что радиальная зависимость различных частей потенциала (центрального, тензорного и спин-орбитального) в (2.14) имеет одинаковую, в частности, юкавскую форму. Конечно, при этом каждая часть потенциала должна определяться не только своей величиной, но и своим радиусом действия (обозначенного ниже как R_i). Хотя функциональная форма потенциала остается неизменной, все же каждая его часть (центральная, спин-орбитальная и тензорная) представляется совокупностью (суммой) ее компонентов с разным радиусом действия. Схематически каждая часть потенциала V_{NN} типа (2.14) может быть выражена следующим образом [55, 56]:

$$\begin{aligned}
V_C &= \sum_i V_i^C Y(r_{12} / R_i) \quad [\text{центральная часть}] \\
V_{LS} &= \sum_i V_i^{LS} Y(r_{12} / R_i) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \quad [\text{спин-орбитальная часть}] \\
V_T &= \sum_i V_i^T r_{12}^2 Y(r_{12} / R_i) S_{12} \quad [\text{тензорная часть – один из ее вариантов}]
\end{aligned} \tag{2.17}$$

В этих формулах индексы C , LS и T перемещаются (вниз – вверх) из чисто графических соображений. Здесь r_{12} – переменный радиус, $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ – спин-орбитальный оператор и S_{12} – тензорный оператор. Кроме того, как и в случае (2.16), в выражениях (2.17) также используется юкавская форма, которая условно обозначена символом Y (не смешивать с обозначением в (2.1) угловой части Y_L^M).

Как уже выяснялось, для дальнейших микроскопических вычислений целесообразно перейти от параметризации потенциала в координатном пространстве (2.17) к выражениям (юкавского типа) в импульсном пространстве. Соответствующие преобразования для центрального, спин-орбитального и тензорного потенциалов даны в [57].

В настоящей лекции рассматривается (p, p') - и (p, p') -рассеяние в широком диапазоне E_p . В связи с этим для проведения анализа в неколлективном («бездеформационном») режиме было целесообразно основываться на таком подходе, в котором протон-ядерное взаимодействие и ядерная структура могли быть выражены при

помощи простого (линейного) разложения. В этом случае коэффициенты таких разложений можно было подгонять к большому набору экспериментальных данных, которые относились бы к различным наблюдаемым величинам $[\sigma(\theta), A(\theta), A(\theta) \cdot \sigma(\theta), S(\theta)]$ и др., причем по возможности в нескольких ядрах A и для определенного диапазона энергий E_p одновременно. В наибольшей степени этим требованиям отвечает компьютерная программа LEA, составленная Дж. Келли [58].

Рассмотренное в этой лекции взаимодействие идеализировано, так как относится к свободному пространству. В действительности же процессы рассеяния происходят в ядерной материи: в разреженной ее части (на поверхности ядра) и в плотной (насыщенной) области (внутри ядра). Это обстоятельство учитывается в практических расчетах с использованием более сложного формализма (детально см., в частности, в [1]). Сейчас только отметим, что одним из важнейших применений рассматриваемого линейного метода является извлечение плотностной зависимости эмпирического эффективного взаимодействия из неупругого рассеяния для целого ряда состояний одного или даже нескольких ядер. А затем использование этого (подогнанного) взаимодействия осуществляется (см. детально, в частности, в [1]) для анализа других состояний, в том числе и в разных ядрах. Полученное таким способом эффективное протон-ядерное взаимодействие позволяет контролировать зарядовые (протонные) переходные плотности, установленные из электронного рассеяния, а также извлекать нейтронные переходные плотности. Последние представляются важнейшим элементом ядерной структуры и являются существенным достижением современных ядерных исследований. В настоящее время нейтронные переходные плотности наиболее надежно удается получать только на основе анализа неупругого рассеяния поляризованных протонов промежуточных энергий с привлечением соответствующих результатов по электровозбуждению.

ЛЕКЦИЯ 3

О методе связанных каналов

Как уже отмечалось, одним из наиболее простых применяемых феноменологических подходов в широком диапазоне энергий E_p является коллективная модель. В этой модели оптический потенциал предполагается несферическим и разлагается в ряд по степеням его деформации. Затем сферическая часть потенциала используется для того, чтобы произвести упругое рассеяние, в то время как несферические части идентифицируются с взаимодействием неупругого перехода. Характеристики этого взаимодействия определяются из упругого рассеяния, кроме силы взаимодействия. Последняя выражается, в частности, через параметр деформации.

Общеизвестно, что успех решения той или иной задачи по рассеянию демонстрируется согласием выводов теории с экспериментальными данными. Но в рассматриваемых случаях этот успех в значительной степени предопределяется тем, насколько основательно выбран гамильтониан, т.е. результат зависит от того, учтены ли все важные взаимодействия [5]. С теоретической точки зрения серьезным шагом (по сравнению с простой оптической моделью) является переход к так называемой обобщенной оптической модели. В этой модели рассеяние определяется оптическим потенциалом, являющимся не только функцией координат налетающей частицы, но и функцией динамических переменных, описывающих возбуждение ядерной поверхности. Тогда уравнение Шредингера в развернутом виде принимает более сложный вид по сравнению с тем, как оно представлено выше (в лекции 1). Обобщенная оптическая модель была впервые применена в работах [31, 30], а затем развита в [32–39] и др.

Следуя теории, предложенной в работе [30], напомним новое уравнение Шредингера для системы, состоящей из падающего нуклона и ядра-мишени в координатной системе центра масс. Новое уравнение приобретает вид:

$$[H_N(\xi) + T + V(\mathbf{r}, \xi)] \Psi(\mathbf{r}, \xi) = E \Psi(\mathbf{r}, \xi). \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{r}$ обозначает координаты падающей частицы, ξ – внутренние координаты ядра-мишени, T – оператор кинетической энергии для относительного движения, $\Psi(\mathbf{r}, \xi)$ – полная волновая функция системы и E – общая энергия. Потенциал $V(\mathbf{r}, \xi)$ представляет собой энергию взаимодействия между частицей и ядром. Поскольку теперь он является функцией динамических координат ξ_{LM} , описывающих, в частности, смещение поверхности, то он содержит состояние поверхности ядра.

Задача, представленная выражением (3.1), существенно образом отличается от той, что задавалась формулами в лекции 1. Одним из главных различий этих задач является то, что в (3.1) включен отсутствующий ранее оператор гамильтониана $H_N(\xi)$, определяющий состояние системы, которая представлена ядром N . Этот оператор имеет свои собственные функции и собственные значения.

Для ясности дальнейшего понимания в качестве примера рассмотрим конкретную задачу, в которой приведен полный гамильтониан в случае взаимодействия налетающего нуклона с вращающимся ядром. Такой гамильтониан имеет следующий вид [31]:

$$H = -(\hbar^2 / 2m) \nabla^2 + T_{rot} + V(r, \theta). \quad (3.2)$$

В этом выражении, как и в формулах лекции 1, первый член – оператор кинетической энергии системы. $V(r, \theta)$ играет приблизительно ту же роль, что и U в выражениях лекции 1, т.е. является комплексным потенциалом, характеризующим взаимодействие падающего нуклона с ядром, но теперь уже с ядром деформированным. Наконец, в (3.2) появился совсем новый член, отсутствовавший ранее, а именно T_{rot} . Он представляет собой оператор ротационной энергии для ядра-мишени. Если, как в [31], ядро-мишень обладает фиксированной, аксиальной симметричной формой, тогда (r, θ, ϕ) – координаты налетающей частицы относительно главных осей ядра.

На основе отдельного гамильтониана системы, представленного в общем виде в (3.1) как $H_N(\xi)$ или в более конкретном виде как T_{rot} (3.2), можно составить свое уравнение Шредингера для мишени [31] и получить волновые функции, отвечающие ядерным состояниям. В случае использования T_{rot} эти коллективные состояния могут характеризоваться значениями спина I и его проекциями M и K вдоль фиксированной в пространстве оси z и оси симметрии ядра, соответственно. Вызванные налетающим нуклоном определенные переходы в ядре связывают состояния с различными значениями спина I внутри ротационной полосы, которая обладает своим внутренним характером и фиксированной проекцией K . В работе [31] авторы ограничиваются случаем $K = 0$ с начальным спином мишени $I = 0$, что свойственно четно-четным ядрам. Тогда получается уравнение Шредингера для ротационной полосы основного состояния четно-четного ядра с набором спинов $I = 0, 2, 4$ и т.д. для $K = 0$.

Хотя, строго говоря, следовало бы рассматривать волновые функции для индивидуальных частиц мишени, в макроскопических подходах обычно используется описание, подобное только что представленному, где отдельные орбиты нуклонов не имеют значения. В ротационной модели, которая здесь взята как конкретный случай, взаимодействие между налетающей частицей и мишенью, обозначенное в (3.1) через $V(\mathbf{r}, \xi)$, может представлять собой некоторый потенциал $V(\mathbf{r}, \hat{r}')$, где $\hat{r}'$ – собственная ось ядра (определенная внутренняя координата). Этот потенциал может задаваться и при помощи

квадрупольной и гексадекапольной деформации (с ее параметрами β_2 и β_4), а также с использованием деформации более высокого порядка. Указанные параметры деформации являются коэффициентами разложения, представленного формулой:

$$R(\theta) = R_0 \left[1 + \beta_2 Y_2^0(\theta) + \beta_4 Y_4^0(\theta) + \dots \right] \quad (3.3)$$

для радиуса ядра $R(\theta)$, где θ – угол между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Этот радиус, в принципе, может быть применен вместо используемого радиуса в выражении для потенциала оптической модели. Если таким образом полученный обобщенный потенциал затем разложить по мультиполям или сферическим гармоникам, то первым членом такого разложения окажется обычный сферический оптический потенциал, генерирующий, как всегда, упругое рассеяние [23].

Указанное выражение (3.3) представляет по существу уравнение поверхности ядра для частного случая, а именно: при существовании аксиальной симметрии ядра и ограничении гексадекапольной деформацией β_4 или моментом с $\lambda = 4$. Конечно, при этом не оставлен без внимания факт, что ядро не имеет резкой границы. Тогда существующий «хвост» распределения плотности можно учесть, рассматривая выражение (3.3) при различных значениях R_0 как уравнение для поверхности постоянной плотности [23].

При дальнейших обобщениях уравнение деформированной поверхности для вращающихся ядер с аксиальной симметрией приобретает следующий вид (см [30–36]):

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda} \beta_{\lambda} Y_{\lambda 0}(\theta, \varphi) \right]. \quad (3.4)$$

А форма поверхности ядра в самом общем виде может быть описана функцией [23, 59]:

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda, \mu} Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \varphi) \right], \quad (3.5)$$

где θ и φ – полярные углы относительно произвольных осей координат. При помощи функции (3.5), представляющей собой разложение радиуса по сферическим гармоникам, можно описать коллективное движение самого общего типа, взяв изменяющиеся во времени коэффициенты α, μ [23, 59].

В случае сферической равновесной формы ядра вибрационные типы возбуждений можно охарактеризовать квантовым числом мультипольности λ , которое представляет собой угловой момент вибрационного кванта. Каждое такое возбуждение $(2\lambda + 1)$ – кратно вырождено, что соответствует разным значениям проекции вибрационного углового момента μ [59]. Эти проекции характеризуются величинами $\mu = -\lambda, -\lambda + 1, \dots, +\lambda$, что и отражено при суммировании в выражении (3.5).

Таким образом, из вышеизложенного видно, что коллективные движения в ядрах могут быть описаны в терминах деформации ядерной формы, причем деформации как постоянной, так и динамической.

Используя математический прием квантовой механики [20], разложим полную волновую функцию системы $\Psi(\mathbf{r}, \xi)$ в выражении (3.1) по собственным функциям общего углового момента [30]. Это разложение представлено формулой:

$$\Psi(\mathbf{r}, \xi) = \sum_{JM} a_{JM} \psi_J^M(\mathbf{r}, \xi). \quad (3.6)$$

Итак, мы кратко излагаем возможности применения формализма, именуемого приближением сильной связи или обычно называемого методом связанных каналов (МСК).

Развитие его состоит в дальнейшем разложении волновых функций ψ_J^M (3.6) по определенному базису – по стационарным состояниям мишени. Подобное разложение по функциям мишени (собственным состояниям гамильтониана ядра мишени) сводит многоканальную задачу к системе связанных между собой одноканальных уравнений Шредингера. Этот формализм ясно изложен, например, в работе [24]. Если следовать этому разложению, то можно видеть, что действительно в принципе бесконечная система уравнений приводит к приближению сильной связи каналов. Такое приближение достигается, если сократить первоначальную систему и ограничиться конечным числом связанных между собой уравнений. Разумеется, результат будет уже менее точным. Но, соблюдая приемлемые условия, рассматриваемое обрывание числа каналов можно выполнить так, чтобы явным образом учесть лишь те каналы, которые представляют наибольший интерес, игнорируя другие менее существенные каналы.

Несмотря на возможную неопределенность, может оказаться, что даже в том случае, когда открыто много каналов и пренебрегается их достаточно большим числом, кроме нескольких наиболее важных, удастся получить вполне надежные результаты рассеяния в выделенных каналах. Например, некоторые ядра имеют одно наиболее сильно возбуждающееся нижайшее коллективное состояние (такое, как 2_1^+ в ^{12}C , ^{24}Mg , и др.). Исходя из вышеизложенного, рассеяние протонов на таких ядрах можно рассматривать в приближении лишь двух каналов. Такая расширенная, но ограниченная по числу каналов оптическая модель допускается в работах [24, 30], где низколежащее состояние, обусловленное квадрупольным коллективным движением, сильно связано с основным состоянием ядра.

В практических расчетах по МСК вводят подходящий потенциал V в уравнение (3.1). Для начала это может быть потенциал $V_{onm} \equiv U(r)$ (1.3), в первом приближении примененный и к точной системе связанных друг с другом одностичных уравнений. В этих уравнениях выбранное число n каналов рассматривается явно, а влияние всех других (пренебрегаемых) каналов учитывается, как уже отмечалось, оптическим потенциалом. Следовательно, обобщенный (в конечном счете подогнанный) оптический потенциал V_{onm} будет зависеть от выбора анализируемых каналов.

Вернемся к разложению волновой функции (3.6). Пусть в упрощенном варианте частица (ее координата x) налетает на произвольную мишень (координаты $x_{миш}$). Мишень состоит из системы частиц и находится в одном из дискретных состояний α . Волновую функцию стационарных состояний системы частиц, составляющих мишень, обозначим как $\phi_\alpha(x_{миш})$. Оказывается, что для многочастичной волновой функции, обозначенной как ψ_J^M в выражении (3.6), полезно выполнить разложение по стационарным состояниям мишени $\phi_\alpha(x_{миш})$. Когда производится разложение общей волновой функции ψ_J^M по функциям мишени, то в качестве коэффициентов такого разложения выступают амплитуды f , а именно амплитуды упругого рассеяния и неупругого рассеяния с возбуждением для дискретных значений α [24].

Рассмотрим конкретный пример двухканальной задачи ($n = 2$), как это было предложено в работе [30]. Предположим, что волновая функция $\psi_J^M(\mathbf{r}, \xi)$ в выражении (3.6) для каждого входного канала (Ijl) может быть адекватно описана как суперпозиция состояний упругого и неупругого рассеяния, т.е.

$$\psi_J^M(\mathbf{r}, \xi) = r^{-1} \left[f_{Ijl}^J(\mathbf{r}) \phi_{Ijl}^{JM}(\hat{\mathbf{r}}, \xi) + \sum_{j'l'} f_{Ij'l'}^{J'}(\mathbf{r}) \phi_{Ij'l'}^{JM}(\hat{\mathbf{r}}, \xi) \right]. \quad (3.7)$$

Здесь множители типа $\phi_{jl}^{JM}(\hat{r}, \zeta)$ в сущности играют роль упомянутых выше функций мишени $\phi_a(x_{миш})$, хотя и представляют собой уже более обобщенные выражения, на чем мы остановимся ниже.

Множитель (амплитуда) $f_{jl}^J(\mathbf{r})$, фактически характеризующий указанный выше коэффициент разложения, является радиальной волновой функцией частиц упругого рассеяния от ядра, которое находится в состоянии со спином I . Эта функция определяется относительным орбитальным моментом l , относительным угловым моментом $j = I \pm 1/2$ и общим угловым моментом J . Обе радиальные функции $f_{jl}^J(\mathbf{r})$ и $f_{I'j'}^{J'}(\mathbf{r})$ в (3.7) относятся к случаям $I = 0$ (основное состояние четно-четного ядра) и $I' \neq 0$ (возбужденное состояние), соответственно. Общий угловой момент J , как известно, определяется сложением $\mathbf{J} = \mathbf{I} + \mathbf{j}$. Поэтому для четно-четного ядра, находящегося в основном состоянии ($I = 0$), имеем только $J = j = l \pm 1/2$, где l – орбитальный угловой момент во входном канале. Еще раз подчеркнем, что $(I' j' l')$ – квантовые числа, относящиеся к возбужденному состоянию ядра, для которого $j' = l' \pm 1/2$.

Так, при указанном разложении волновой функции ψ_j^M для каждого входного канала (Ijl) , как дано в формуле (3.7), использованы функции $\phi_{jl}^{JM}(\mathbf{r}, \zeta)$. Они представляют собой не что иное, как ядерные волновые функции $\psi_I^k(\zeta)$, связанные векторным способом со спин-угловыми частями волновых функций падающих частиц, т.е. с $\{i^l Y_l^\lambda(\hat{r})\} \mathfrak{a}_s^\mu (s = 1/2)$. В полном виде функции ϕ являются следующими [30]:

$$\phi_{jl}^{JM}(\hat{r}, \zeta) = \sum_{\kappa\lambda\mu} C_{M\kappa m}^{Jlj} C_{m\lambda\mu}^{jls} \Psi_I^k(\zeta) \{i^l Y_l^\lambda(\hat{r})\} \mathfrak{a}_s^\mu. \quad (3.8)$$

Они представляют собой связь волновой функции ядра Ψ (зависящей только от его внутренних координат ζ и относящейся к рассматриваемому состоянию) с волновой угловой функцией $Y_l^\lambda(r)$ (сферические гармоники) и со спиновой волновой функцией падающей частицы $\mathfrak{a}_s^\mu$. Последняя функция имеет спиновую переменную σ (опущена). Эта функция была ранее применена в формулах (1.15, 1.17) с несущественной разницей в графическом обозначении (в частности в расположении индекса μ).

В выражении (3.8), взятом из работы [30], в координатном представлении под $i^l Y_l^\lambda(\hat{r})$ подразумевается волновая функция (гармоника) для состояния с определенным орбитальным моментом l . В этой функции аргумент $\hat{r}$ обозначает угловые переменные, а дополнительный фазовый множитель i^l введен на основании требований преобразования при обращении времени [17].

Коэффициенты, используемые в разложении (3.8) и обозначенные буквами C с соответствующими индексами, представляют собой так называемые коэффициенты векторного сложения двух моментов количества движения или коэффициенты Клебша–Гордана (иногда: Жордана). Они определяют вклад различных функций и являются матрицами определенного преобразования (см., например, [17, 15, 23] и др.). Здесь МСК формируется упрощенным способом, когда обменом налетающего нуклона с нуклонами мишени пренебрегается.

Приведенный выше пример, взятый из [30], касается, как уже отмечалось выше, двухканальной задачи ($n = 2$). Распространим это рассмотрение на случай любого числа n состояний мишени. Отнесем $n = 1$ к основному состоянию ядра. Энергии состояний ядра и соответствующие спины обозначим через ε_n и I_n , соответственно. Введем $E_n = E - \varepsilon_n$, где E – энергия падающих частиц, а E_n ($n > 1$) является кинетической энергией частицы, которая покидает мишень после возбуждения ее в n -состояние.

В предлагаемом ниже рассмотрении случая любого числа каналов (n) мы будем придерживаться работы [36], являющейся обобщением серии исследований [36, 60] и др. Из-за обобщающего характера изложения [36] нам представляется целесообразным сохранить основные приведенные там обозначения. Но поскольку они иногда отличаются от тех, что использовались в пионерских работах, например в [30], и уже приводились нами, включая выражения (3.7) и (3.8), то далее мы просто дадим дополнительные, достаточно очевидные разъяснения, касающиеся изменений.

Итак, согласно [36], волновую функцию Ψ (3.6) общей системы, состоящей из налетающей частицы и мишени, можно разложить по базисным состояниям и записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi &= r^{-1} \sum_{JnI_nj_n} R_{JnI_nj_n}(r) (y_{l_nj_n} \otimes \Phi_{I_n})_{JM} = r^{-1} \sum_{JnI_nj_nm_jM_n} R_{JnI_nj_n}(r) (j_n I_n m_j M_n | JM) y_{l_nj_nm_j} \Phi_{I_nM_n} = \\ &= r^{-1} \sum_{JnI_nj_nm_jM_nm_l m_s} R_{JnI_nj_n}(r) (j_n I_n m_j M_n | JM) \times \\ &\quad \times (l_n s m_l m_s | j_n m_j) i^{l_n} Y_{l_n m_l}(\theta, \varphi) \mathfrak{a}_{sm_s}(\sigma) \Phi_{I_n M_n}(\xi). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Действительно, эта формула представляет собой не что иное, как разложение полной волновой функции Ψ (3.6) по связанным состояниям ядра-мишени, т.е. в терминах полного набора значений $(y_{l_nj_n} \otimes \Phi_{I_n})_{JM}$ с неизвестными коэффициентам $R_{JnI_nj_n}(r)$. Функции Φ (3.9) могут быть заданы в рамках какой-либо модели. Тогда дальнейшая задача сводится к нахождению указанных коэффициентов R . Выше, в разложении (3.7), их роль играла амплитуда f . Коэффициент R в действительности является функцией $R_{JnI_nj_n}(r)$, которая представляет собой радиальную часть волновой функции налетающей частицы или, более точно, волновой функции относительного движения между налетающей частицей и мишенью. Формализм решения задач для нахождения функции такого движения хорошо разработан в квантовой механике, поэтому ниже этот формализм только кратко обозначим.

Итак, значение $y_{l_nj_n}$ описывает компонент (относящийся к угловому моменту) волновой функции налетающей частицы. Его точное определение можно понять из третьего (последнего) представления функции Ψ в выражении (3.9), а также из сопоставления этого выражения с формулой (3.8). Символ $\otimes$ в (3.9) обозначает векторную связь, а J – угловой момент общей системы. В (3.9) посредством выражения в скобках представлены коэффициенты Клепша–Гордана с их соответствующими аргументами. По-прежнему $\mathfrak{a}_{sm_s}$ в (3.9) – спиновая волновая функция налетающей частицы, только в несколько другом обозначении индексов по сравнению с (3.8).

Гамильтониан общей системы H , соответствующий полной волновой функции, которая представлена выражением (3.9), является тем же самым, что указан и в уравнении (3.1). Запишем этот гамильтониан в следующей краткой форме, но также состоящей из трех частей:

$$H = H_N + K_p + V. \quad (3.10)$$

Здесь H_N , как и в (3.1), характеризует внутреннее движение мишени и, таким образом, удовлетворяет следующему уравнению:

$$H_N \Phi_{I_n}(\xi) = \varepsilon_n \Phi_{I_n}(\xi). \quad (3.11)$$

Обычно так выбирают шкалу энергии, чтобы было $\varepsilon_1 = 0$, что соответствует основному (невозбужденному) состоянию ядра, обозначенному выше как $n = 1$. K_p – кинетическая энергия налетающей частицы (в нашем случае – протона), в то время как V – общее взаимодействие между этой частицей и мишенью. В простой оптической модели $V = V_{opt}(r) = U(r)$ является функцией только координат r (включающих в себя еще и спиновую переменную σ), но не содержащей координату мишени ξ , что видно из выражения (1.3). Расширение простой оптической модели и обобщение ее до МСК как раз и заключается в предположении, что теперь V является функцией координат ξ – так же, как и координат налетающей частицы (r, θ, φ). Если потенциалы V определенным образом разложить на части, то мы получим матрицу потенциалов, которые описывают взаимодействия налетающей частицы с мишенью. Два главных компонента этой матрицы можно представить как диагональный член (V_{diag}) и потенциал связи (V_{cs}).

Как показано в [24], диагональные элементы матрицы потенциалов просто равны среднему значению потенциала, действующего на налетающую частицу в статическом поле мишени, находящейся в состоянии ϕ_a . По существу, в формализме МСК из полного взаимодействия налетающего нуклона с ядром-мишенью выделяется потенциал среднего поля, а после подобного выделения устанавливается так называемое остаточное взаимодействие [61].

В конечном счете прямая реакция описывается набором связанных уравнений для волновых функций открытых каналов с потенциалами диагональными и недиагональными [34]. Гамильтониан (3.10) теперь приобретает вид:

$$H = H_N + T + V_{diag} + V_{cs}, \quad (3.12)$$

где $T \equiv K_p$ – кинетическая энергия налетающей частицы, а H_N – по-прежнему гамильтониан внутреннего движения нуклонов в ядре.

Как и раньше, будем исходить из уравнения Шредингера (1.2) с общим гамильтонианом (3.12), но теперь под ψ будем иметь в виду общую волновую функцию Ψ в форме (3.9). Подставим в уравнение (1.2) явные выражения для H (3.12) и Ψ (3.9). Далее производится процедура умножения слева каждого слагаемого в этом уравнении на величины

$$\left(y_{l_n j_n} \otimes \Phi_{I_n} \right)_{JM}^*. \quad (3.13)$$

Этим достигается полный набор разложения волновой функции Ψ с коэффициентами $R_{Jn l_n j_n}(r)$ (3.9). Эти коэффициенты R являются радиальными функциями. Далее производится интегрирование по всем координатам, кроме радиальной переменной r , т.е. только по переменным ядра. Последняя процедура наглядно описана в [61]. При этом учитывается то обстоятельство, что одна часть взаимодействия является диагональной (V_{diag}), а вторая – недиагональной (V_{cs}) по отношению к полному набору функций $(y_{l_n j_n} \otimes \Phi_{I_n})_{JM}$. В результате получается следующий набор уравнений [36]:

$$\begin{aligned} & \left[\hbar^2 / 2m (d^2 / dr^2 - l_n(l_n + 1) / r^2 - V_{diag} + E_n) \right] R_{Jn l_n j_n}(r) = \\ & = \sum_{n' l_n' j_n'} \left\langle \left(y_{l_n j_n} \otimes \Phi_{I_n} \right)_{JM} \mid V_{cs} \mid \left(y_{l_n' j_n'} \otimes \Phi_{I_n'} \right)_{JM} \right\rangle R_{Jn' l_n' j_n'}(r). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Это и есть система из n -связанных (зацепляющихся) дифференциальных уравнений для радиальных функций R .

Она может иметь разные варианты написания. Так, например, несколько другую ее разновидность можно получить [35], если левую и правую части уравнения (3.14) разделить на величину E_n и если при этом ввести одно объединенное обозначение для произведения $k_n r$, где k_n – волновое число. Несколько иные формы записи подобных уравнений можно увидеть в [61]. Однако важно, что любая из представляемых систем связанных уравнений, объединенных числом каналов n (3.14), является довольно общей и сохраняется таковой независимо от природы налетающей частицы и ядра-мишени.

Но для того чтобы использовать формализм (3.14) для конкретных практических расчетов, надо дать ясно выраженные формы потенциалов V_{diag} и V_{cv} , а также представить реалистичные варианты волновой функции Φ_{I_n} . Среди них V_{diag} может фиксироваться, в частности, за счет подгонки к данным упругого рассеяния, в то время как требуется обязательно ввести специфическую модель (в зависимости от природы мишени) для того, чтобы определить V_{cv} и Φ_{I_n} . Детальное описание того, как это сделать, дано во многих работах (например, [30–36]). Совершенно ясно, что если $V_{cv} = 0$, то система (3.14) сводится к уравнению простой оптической модели, о которой речь шла выше.

Многие расчеты по МСК в работах автора выполнены с привлечением модели Бора–Моттельсона [59] или ее модификаций. При этом ядерные возбуждения классифицируются по двум главным группам: сферические (вибрационные) и деформированные (ротационные) или соответствующие мультиплеты возбуждений. Для вибрационных состояний радиусы ядер аппроксимируются соотношением (3.5), в котором присутствует коэффициент $\alpha_{\lambda\mu}$, а последние в свою очередь связаны с параметрами динамической деформации β_λ [59]. Таким образом, в любом случае коллективных движений параметр β_λ ($\lambda = 2, 3, 4, \dots$) описывает коллективность или деформированность ядра в данном состоянии и, следовательно, несет важную информацию о ядерной структуре.

Используя соотношения (3.4) и (3.5), можно найти явный вид потенциала связи каналов V_{cv} для ротационных и вибрационных возбуждений (причем разного типа), как это показано в работах [30–39]. Действительно, в уравнении (3.14) V_{cv} представляет собой элемент оператора V , который зависит от радиальной переменной r . Его можно найти, разложив потенциал по сферическим гармоникам. Такое разложение приобретает простой вид для независимой от спина части потенциала и существенно усложняется для спиновой составляющей. Формализм МСК с учетом спина детально представлен в работе [34].

ЛЕКЦИЯ 4

Нерелятивистские и релятивистские подходы в изучении процессов рассеяния и ядерной структуры

В работе [1] в подавляющем числе примеров приводились результаты нерелятивистского формализма в описании процессов рассеяния, так же, как и в случае структуры атомного ядра. Аргументы в пользу такого выбора исследований являются фактически теми же самыми, что приведены в известной монографии по теории рассеяния Дж. Тейлора [24]. Однако нерелятивистские подходы все же часто содержат много свободных параметров. Поэтому здесь мы не исключили параллельного рассмотрения ряда аспектов релятивистского свойства.

Конечно, обычно весьма удобным и широко используемым в нерелятивистском подходе является наличие NN -взаимодействия, основанного на феноменологических и полуфеноменологических принципах. Но наряду с этим не исключается также применение

NN -рассеяния, сформированного в терминах обмена, например, бозонами с константами связи и массами, определяемыми из других экспериментов.

Правда, в практическом анализе нередко трудно выделить конкретное преимущество одного или другого метода. Это связано с тем, что некоторая возможная неадекватность нерелятивистского подхода просто не играет важной роли, поскольку параметризация NN -взаимодействия является настолько гибкой, что обеспечивает приемлемую качественную подгонку многих расчетов к экспериментальным данным. В итоге оказывается, что использование нерелятивистских уравнений становится эффективно и вполне оправданно, так как их численные результаты фактически приводят к альтернативному релятивистскому описанию процесса рассеяния, причем нередко превосходят релятивистское описание по качеству [62–66].

Как известно (см., например, [1]), традиционные (нерелятивистские) подходы основаны на уравнении Шредингера, которое включает нуклон-нуклонное взаимодействие посредством статических или почти статических потенциалов. Эти потенциалы могут определяться, в частности, из нерелятивистских уравнений типа Бракнера–Хартри–Фока и часто содержат дополнительную зависимость от ядерной плотности. Таким образом, удается феноменологическим способом вводить в нуклон-нуклонные силы вклады от эффектов высоких порядков. Часто этим исследованием не ограничиваются, а включают еще и дополнительную, чисто феноменологическую подгонку.

Вместе с тем для подобных целей существуют и альтернативные, например, так называемые релятивистские подходы, которые основываются на релятивистской квантовой теории поля. Они получили развитие, в частности в работах [67, 68] и др. В таком формализме нуклоны взаимодействуют посредством обмена виртуальными мезонами, в результате чего исчезает необходимость в том, чтобы вводить статические или почти статические потенциалы.

Конечно, мезонные степени свободы могут быть успешно учтены, как оказалось, и в статических двухтельных нуклон-нуклонных потенциалах при обычно наблюдаемой плотности ядерной материи. Однако последовательная теория должна включать эти степени свободы в явном виде при подходе к более высоким плотностям. Например, мезонное поле в общем случае может быть сильно искажено, когда нуклоны вынуждены перекрываться, особенно в присутствии многотельных сил. Кроме того, следует учесть возможность того, что в конечном результате не исключено присутствие и реальных мезонов, когда ферми-импульс нуклона окажется достаточно большим.

Необходимость в существовании теоретических выражений, которые позволяли бы описывать ядерную материю при всех ее плотностях, является совершенно ясной. Это становится особенно очевидным, если мы хотим изучать всеобщие свойства материи не только в земных или просто лабораторных условиях, но и включать для исследования также холодные конденсированные космические объекты, такие как нейтронные звезды [67].

Подходящая для этих целей модель в рамках релятивистской квантовой теории поля в ядерной материи была предложена в работе [67]. Эта модель строится на основе мезонных скалярных и нейтральных векторных полей. Такие поля можно связать соответственно с σ - и ω -мезонами. Согласно [67], предложенная модель может быть аппроксимирована при высоких плотностях путем замены операторов мезонного поля на их ожидаемые величины. Вообще говоря, как считают авторы работы [68], предлагаемая модель способна описать бесконечную ядерную материю, конечные ядра, структуру отдельных нуклонов, нуклон-нуклонное рассеяние, а также взаимодействие ядра с бомбардирующей его элементарной частицей. Кроме того, как отмечается в [68], рассматриваемая модель была расширена за счет включения взаимодействия изовекторных π - и ρ -мезонов в рамках теории, допускающей перенормировку.

Релятивистский формализм дает унифицированную картину ядерного насыщения, спин-орбитальной силы, плотностную зависимость взаимодействия, а также большую величину релятивистских эффектов. Выделяя перечисленные аспекты релятивистской

теории, авторы работы [68] вместе с тем отмечают, что многие указанные черты включены и в нерелятивистские расчеты, но там эти черты имеют совсем другое происхождение.

Обсуждая концепцию оптического потенциала и ее изменения в историческом аспекте, известный американский физик Остерн классифицирует в работе [69] сильные и слабые стороны этого формализма. В частности, он обращает внимание на то, что при систематическом анализе действительной части оптического потенциала, установленного для широкого диапазона промежуточных энергий протонов, обнаруживаются значительные нерегулярности в радиальной зависимости рассматриваемого потенциала. По мнению автора, подобные нерегулярности, вероятнее всего, связаны с интерференцией между независимыми конкурирующими процессами физического свойства. При этом допускается несколько типов упомянутой интерференции. Самую первую возможность такого рода может представлять «состязательный» процесс между векторными и скалярными вкладами в дираковской формулировке, что сначала казалось загадочным.

Со временем стало выясняться, что наблюдаемые величины, получаемые в рассеянии протонов и зависящие от спина, особенно чувствительны к разнице между скалярным и векторным членами в оптическом потенциале в уравнении Дирака. Так, предсказания упомянутых наблюдаемых величин в упругом рассеянии протонов демонстрировали достаточную чувствительность к динамическим чертам релятивистской плотности. Согласно этому формализму, в ядрах с замкнутыми оболочками преобразование Фурье для ядерной плотности состоит из трех разных формфакторов: скалярного, векторного и тензорного. Что же касается нерелятивистского предела, то ему как раз свойственно равенство всех этих трех формфакторов (см., в частности, [70]).

Различие релятивистских плотностей проявляется следующим образом. Так, благодаря большим величинам скалярного и векторного компонентов в нуклон-нуклонных амплитудах, причем компонентов с противоположными знаками, обнаруживается особая чувствительность оптического потенциала в дираковской формулировке к разнице между скалярной (ρ_s) и векторной (ρ_v) плотностями:

$$\delta\rho(r) = \rho_v - \rho_s. \quad (4.1)$$

Эффекты релятивистских ядерных плотностей с точки зрения описания дифференциальных сечений, анализирующей способности и функции поворота спина в процессе упругого рассеяния протонов с $E_p = 200, 500$ и 800 МэВ в случае некоторых магических ядер изучались, например, в работе [70].

Если на время пренебречь принципиальными деталями, то можно сделать вывод, касающийся сравнительного описания процесса рассеяния, причем как упругого, так и неупругого, в двух методах: нерелятивистском и релятивистском. Так, в случае макроскопического (деформационного) подхода скалярный потенциал U_s и векторный потенциал U_v , используемые в уравнении Дирака, в общем могут трактоваться с точки зрения физического смысла как центральный потенциал в уравнении Шредингера. В целом это утверждение можно считать приблизительно справедливым как для МИВ, так и для МСК (см. [71]).

Структура атомного ядра также может быть хорошо понята в рамках релятивистской модели, особенно такие эффекты, как спин-орбитальная связь в конечном ядре. Так, одночастичное движение и спин-орбитальное расщепление в конечных ядрах может быть описано в релятивистской модели типа Дирака–Хартри для нуклонов, взаимодействующих посредством обмена скалярными и векторными бозонами (см., в частности, [72]).

Поскольку спин-орбитальный потенциал играет существенную роль при описании поляризационных данных в упругом рассеянии, было чрезвычайно важно использовать спин-орбитальную связь, представляемую как релятивистский эффект. Сопоставление релятивистских расчетов с экспериментальными данными для анализирующей способности при упругом рассеянии протонов на ядре ${}^4\text{He}$ в диапазоне $E_p = 561\text{--}1730$ МэВ

было осуществлено в работе [73]. Здесь релятивистская оптическая модель строилась на основе уравнения Дирака. При этом протон-ядерное взаимодействие конструировалось в терминах двух потенциалов: скалярного потенциала U_s и четвертого компонента векторного потенциала U_v . Сочетание двух типов потенциалов автоматически обеспечивало эффективный центральный и спин-орбитальный потенциалы, свойственные для традиционной оптической модели. Добавлялся также кулоновский потенциал, который определялся из эмпирического зарядового распределения ядра.

Независимо от того, какой формализм мы намерены применить к анализу процесса неупругого рассеяния (нерелятивистский или релятивистский), мы обычно стремимся опереться на уже апробированные элементы ядерной физики. Они могут относиться либо к хорошо известным модельным представлениям (в частности, коллективная модель, приближение случайных фаз и др.), либо к надежно установленным экспериментальным фактам (например, переходные плотности, извлеченные из электровозбуждения).

Само уравнение Дирака и его применение для решения задач по рассеянию широко известно в литературе [15, 23, 42, 47, 67, 77 и др.]. На самом уравнении мы остановимся несколько ниже, а сейчас рассмотрим ряд общих аспектов, связанных с пониманием его роли в ядерной физике. Прежде всего отметим, что радиальные собственные волновые функции Дирака для движения, например, протона в поле ядра на бесконечности ведут себя по тому же закону, что и в теории Шредингера, т.е. обращаются в нуль [15 и др.]. Однако в общем виде имеются и существенные различия, включая и волновые функции, между уравнением Шредингера и уравнением Дирака. Так, подчеркнем, что уравнение Дирака для волновой функции $\Psi(\mathbf{r})$ может быть записано как два связанных уравнения: для верхнего и нижнего компонентов общей функции $\Psi(\mathbf{r})$ [78]. В качественном понимании подобную двухкомпонентную функцию $\Psi(\mathbf{r})$ можно отождествить с нерелятивистским спинором Паули [42, 77].

Примем с целью упрощения написания формул систему, в которой $\hbar = c = 1$. Как мы уже отметили, в уравнении Дирака одночастичные волновые функции имеют верхние и нижние компоненты [42, 77]. Эта структура касается одночастичных волновых функций как для нуклона континуума, так и для связанного состояния. Нередко еще пользуются названием соответственно больших и малых компонентов волновых функций (см., например, [47]), на чем мы остановимся ниже. Выберем для простоты ядро со спином $I = 0$ в основном состоянии. Если пока мы опустим малые члены в уравнении Дирака, то в этом случае это уравнение для упругого рассеяния примет следующий вид [47, 78]:

$$[\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta (m + U_s) + U_v + U_C] \psi = E\psi. \quad (4.2)$$

В формуле (4.2) U_s – скалярный потенциал, а U_v – так называемый четвертый компонент векторного потенциала. Таким образом, в уравнении Дирака оптический потенциал представляет собой смесь потенциалов. Здесь отмечены только те составляющие потенциалов, которые играют определяющую роль. По модулю приведенные здесь потенциалы U_s и U_v оказываются большими (около нескольких сотен МэВ) во внутренней части ядра и являются противоположными по знаку. Для указанного четвертого компонента векторного потенциала U_v в литературе очень часто применяется также следующие обозначения: $U_0 \equiv U_0(r)$ [78] или V_4 [79]. В выражении (4.2) $U_C \equiv U_C(r)$ представляет собой кулоновский потенциал, определяемый из эмпирической зарядовой плотности ядра. Кроме того, в (4.2) m – масса нуклона, а E – общая энергия нуклона в системе центра масс.

Уравнение движения частиц типа Дирака (4.2) с математической точки зрения имеет вид, сходный с уравнением Шредингера (1.2, 1.3, 1.24), но с другим оператором Гамильтона. В частности, в уравнении (4.2) оператор Гамильтона содержит дираковские матрицы α и β [77].

Часто бывает удобно ввести также другие матрицы – γ_μ , представляющие собой релятивистское обобщение спина и выражающиеся через матрицы α и β [15, 42, 47 и др.]. Что касается матриц α и β (четырёхмерных), то они составляются так, что их матричными элементами становятся двумерные матрицы Паули или, другими словами, спиновые матрицы [15 и др.]. Для примера одна из комбинаций трех матриц Паули представлена в следующем выражении, являющемся векторным спиновым оператором [1, 42]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \hat{x} + \sigma_y \hat{y} + \sigma_z \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \hat{y} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{z}. \quad (4.2a)$$

По существу, это выражение можно трактовать как наше соглашение, просто означающее, что спин частицы задается обычными матрицами Паули [24].

Матрицы α и β уравнения Дирака появляются в общем одночастичном гамильтониане за счет вклада оператора T , т.е. оператора релятивистской кинетической энергии [72], что будет ясно из дальнейшего изложения.

Различием между релятивистскими (4.2) и нерелятивистскими (1.24) потенциалами, как правильно подчеркивается в работе [47], совершенно нельзя пренебрегать. Действительно, как отмечалось выше, скалярный и векторный потенциалы являются в целом большими (порядка сотен МэВ), в то время как обычный нерелятивистский потенциал в среднем составляет величины только порядка десятков МэВ.

Относительно структуры потенциалов, включенных в выражение (4.2), можно сказать, что для нее используется ряд упрощающих положений. Так, допускаются в первом приближении лишь ограничения локальностью векторного и скалярного потенциалов. Это ограничение мотивируется законами сохранения, применяемыми к вещественным статическим потенциалам, а также некоторыми аппроксимациями мезонного обмена. В таких рассмотрениях предполагается, что именно эти потенциалы являются наиболее важными [80].

Основные черты вещественной части релятивистского оптического потенциала были проверены в ряде микроскопических расчетов релятивистского типа. Подобные вычисления действительно подтверждают, что большая величина скалярного и векторного потенциалов возникает из мезонных обменов. Эти сильные взаимодействия, обладающие преобразованиями Лоренца, обеспечивают естественное описание спин-орбитального потенциала, а также в значительной степени объясняют и энергетические зависимости в нерелятивистских оптических моделях. В дальнейшем была доказана также и большая роль величины W_s и W_v – соответствующих мнимых частей релятивистского оптического потенциала (см., в частности, [81]).

В нерелятивистской модели рассеяния все члены оптического потенциала (кроме кулоновской составляющей) при рассмотрении в полном виде представляются комплексными (лекция 1). В принципе аналогичная ситуация предполагается и в релятивистском подходе. Тогда, согласно, например, исследованию [80], потенциалы уравнения Дирака (4.2) можно представить как комплексные и записать в следующем виде:

$$U_s(r) = V_s f_s(r) + iW_s g_s(r), \quad (4.3)$$

$$U_0(r) = V_0 f_0(r) + iW_0 g_0(r). \quad (4.4)$$

В формуле (4.4) обозначение $U_0(r)$ имеет тот же самый смысл, что и U_v в выражении (4.2). Указанные в (4.3) и (4.4) формфакторы потенциалов конструируются по существу в том же виде, что был использован ранее для нерелятивистского подхода (лекция 1). Так, вещественную часть чаще всего представляют формой Вудса–Саксона (лекция 1) или же двухпараметрической функцией типа Ферми (см. [3, 30] и др.). При этом, по меткому

выражению Ходгсона [3], исследователи обычно стремятся удовлетворить двум противоположным требованиям: физической реальности и математическому удобству. В связи с этим надо всегда иметь в виду, что в таких подходах неизбежно может появиться немало «нефизических» элементов, ограниченных только рамками чисто феноменологических моделей.

В релятивистском формализме все эффекты, связанные с зависимостью от спина, являются явно включенными в уравнение Дирака (4.2). В феноменологическом уравнении Шредингера, основанном на оптической модели, т.е. в нерелятивистском подходе, спин-орбитальный потенциал должен включаться дополнительно. При этом формфактору вводимого спин-орбитального потенциала часто приписывают форму в виде производной от указанной функции типа Ферми. Аналогичный тип формфактора часто описывает и поверхностный компонент центральной мнимой части оптического потенциала того же уравнения Шредингера.

Если произвести подсчет подгоняемых параметров, используемых в представленном уравнении Дирака (4.2), то это число будет равным двенадцати, т.е. тем же самым, что обычно оказывается, согласно [80], и при решении стандартного феноменологического уравнения Шредингера (1.3).

В уравнении Дирака (4.2) мнимые части комплексных потенциалов (4.3, 4.4) обычно трактуются строго феноменологически, т.е. определяются путем подгонки свободных параметров в процессе расчетов и сравнения их с экспериментальными данными. В то же время вещественные части тех же потенциалов (4.3, 4.4) могут устанавливаться не только феноменологическим способом.

В случае применения формализма уравнения Шредингера для нахождения вещественной части центрального оптического потенциала разработан известный метод, обычно называемый фолдинг-моделью. В принципе тот же самый метод приемлем и в случае релятивистского формализма. Тогда и в этом формализме вещественные части потенциалов уравнения Дирака могут быть сконструированы путем свертки эффективного NN -взаимодействия с плотностями ядерной материи самой мишени. Только в релятивистском случае по сравнению с нерелятивистским число выражений типа свертки удваивается. Это связано с тем, что эффективное NN -взаимодействие релятивистского свойства строится на мезонном обмене и содержит два основных компонента, в частности в обозначении: $v_s(r)$ и $v_0(r)$.

Что касается плотности ядерной материи, то, как уже показывалось в выражении (4.1), в ней можно выделить две главные составляющие: скалярную $\rho_s(r)$ и векторную (барионную) $\rho_0(r) \equiv \rho_v$. Заметим, что последняя в (4.1) обозначена как ρ_v . В итоге вещественные части потенциалов уравнения Дирака можно представить следующим образом (см., в частности, [82]):

$$ReU_{0,s}(r) = \int \rho_{0,s}(r') v_{0,s}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d^3r'. \quad (4.5)$$

Очевидно, что в (4.5) объединены два выражения (каждый со своим индексом).

Эффективное релятивистское взаимодействие обычно берется в простых юкавских формах, как это принято и для традиционного нерелятивистского взаимодействия, – см. выражения (2.17). Только теперь, как уже отмечалось выше, эти формы конструируются с использованием масс и констант связи, относящихся при аппроксимации среднего поля к соответствующим массам и константам нейтрального векторного (ω) и скалярного (σ) мезонов в рамках модели однобозонного обмена для NN -взаимодействия.

Неупругое рассеяние с возбуждением низколежащих состояний нормальной четности, как уже было показано, может представляться, в частности, в рамках коллективной модели с использованием МИВ. В случае нерелятивистских расчетов это делается обычно простым способом, а именно путем деформации вещественных и мнимых

частей центрального и спин-орбитального потенциалов, определенных заранее из упругого рассеяния. Но, оказывается, что и в релятивистском подходе скалярный, векторный и кулоновский члены дираковского потенциала (4.2, 4.3, 4.4) могут быть деформированы таким же самым образом, как центральные потенциалы в нерелятивистском случае (см., например, [83]).

К настоящему времени уже разработано немало способов введения дираковской феноменологии в рассмотрение и анализ реакций и ядерных переходов. Все эти методы имеют единое главное свойство, заключающееся в том, что нуклоны, как предполагается, взаимодействуют с ядрами (или ядерной материей) посредством скалярного и векторного потенциалов с силами, имеющими величину, сопоставимую с массой нуклона.

В противоположность различным построениям, основанным на уравнении Шредингера, все возможные релятивистские описания нуклон-ядерного взаимодействия обычно осуществляются в рамках так называемой ковариантной теории. В частности, релятивистская оптическая модель (обычно в англоязычной литературе сокращенно обозначаемая как ROM) представляется как такая модель, в которой используются уравнение Дирака или уравнение Клейна–Гордона–Фока, а также другие ковариантные волновые уравнения, допустимые в этом теоретическом подходе (см., например, [80]). В квантовой механике форму уравнения принято называть ковариантной (см., в частности, [15]), если каждый его член (скаляр, вектор и др.) имеет одинаковую тензорную размерность. Это значит, что все члены уравнения изменяются одинаково в случае преобразования координатной системы. Ковариантная форма уравнения в случае так называемых ортогональных преобразований пространства Минковского автоматически обеспечивает инвариантность следствий (получаемых из уравнения) относительно важного преобразования Лоренца.

Напомним, что четырехмерное пространство Минковского – это такое пространство, в котором три измерения (x_1, x_2, x_3) совпадают с тремя измерениями обычного пространства (x, y, z), а четвертое измерение является мнимым и пропорциональным времени, т.е. $x_4 = ict$.

Упомянутые преобразования Лоренца известны из специальной теории относительности. Релятивистские волновые уравнения должны быть инвариантными относительно преобразования Лоренца. Таким образом, в релятивистском уравнении учитываются требования специальной теории относительности (см., в частности, [20]). В связи с этим в релятивистское уравнение, например (4.2), нельзя произвольно добавить член «потенциальной энергии», как это делалось в случае уравнения Шредингера (1.3, 1.24, 3.1, 3.2, 3.10). В подобных случаях прежде всего требуется изучить трансформационные свойства любого вводимого члена относительно преобразований Лоренца. В итоге все члены релятивистского волнового уравнения должны подчиняться одному и тому же закону.

Итак, обобщения уравнения релятивистского типа можно производить различными способами, но все они должны быть совместимыми с формулами преобразования Лоренца. Как хорошо известно (см., например, [20]), характерной особенностью релятивистских теорий является то, что спин частицы вводится в подобные теории с самого начала, а нельзя спин добавлять в дальнейшем, как это делалось выше в нерелятивистских уравнениях Шредингера. Переход от нерелятивистского описания к релятивистскому неизбежно связан с необходимостью пересмотра целого ряда понятий нерелятивистской квантовой теории, что детально описано, в частности в учебной литературе ([15] и др.).

Релятивистская модель рассеяния частиц, в том числе протонов, на ядрах является, на наш взгляд, вполне современной и последовательной, поскольку строится на основе представления о различных полях, квантами которых являются элементарные частицы. Проблема состоит только в том, что релятивистская модель оказывается намного сложнее, чем нерелятивистская, и вместе с тем она менее разработана теоретически.

Ковариантная форма релятивистских уравнений движения требует, как уже отмечалось, чтобы используемые потенциалы взаимодействия не нарушали инвариантности уравнения по отношению к преобразованиям Лоренца.

Согласно [84–87], уже достаточно давно установлено, что в принципе концепция потенциалов вполне может быть использована для того, чтобы описать многотельную систему типа ядерной в релятивистски ковариантной или (что эквивалентно) лоренцевой форме. Как выяснилось в дальнейшем, существенной чертой дираковской оптической модели явилось то, что оптический потенциал можно трактовать как смесь лоренцевого скалярного и лоренцевого векторного потенциалов (4.2). В рамках релятивистских моделей оказались также вполне успешными описания конечных ядер и ядерной материи. В общем во всех этих работах главным предположением является то, что нуклон-нуклонное взаимодействие вызывается обменом скалярного и векторного бозонов. Таким образом, самая простая релятивистская трактовка многотельной проблемы, использующей идею мезонного обмена в качестве базовой, включает лоренцевые скалярные и лоренцевые векторные компоненты как доминирующие черты ядерного одночастичного потенциала (см., например, [80]).

ЛЕКЦИЯ 5

Соотношения между формализмом уравнения Шредингера и уравнения Дирака

В своих исследованиях мы в значительной степени базируемся на рассеянии электронов как на одном из важных инструментов для получения характеристик ядерной структуры. Из-за того что в этом случае фундаментальное взаимодействие, построенное на обмене фотоном, понято достаточно хорошо, становится возможным сконцентрировать основное внимание на аспектах ядерной структуры. При этом удастся избежать осложнений, что невозможно при использовании ядерных частиц, где мы имеем дело с значительными неопределенностями механизма ядерной реакции. Кроме получения достоверной информации о ядерной структуре, что важно само по себе, электронное рассеяние служит также для калибровки рассеяния на ядрах других частиц (в частности адронов). В последних случаях многие аспекты фундаментального взаимодействия становятся гораздо более сложными и являются менее изученными. Как отмечается многими исследователями, вообще является достаточно полезным установить соотношения между сильными (адронными) и слабыми взаимодействиями налетающих частиц, зондирующих ядерную структуру, хотя это и довольно трудная задача.

Обычно из рассеяния электронов на ядрах извлекаются зарядовые плотности основных состояний, а также зарядовые переходные плотности различных возбужденных уровней. Затем в нерелятивистских подходах осуществляется процедура свертки соответствующих плотностных функций, извлеченных из электронного рассеяния, с эффективным NN -взаимодействием. Само взаимодействие устанавливается тем или иным способом, в том числе из экспериментов по рассеянию протонов.

Некоторые из используемых переходных плотностей (или их функций) характеризуются своей доминирующей ролью на поверхности ядра (при разреженной ядерной материи), а другие переходные плотности определяются в первую очередь внутри ядра, т.е., наоборот, в области насыщенной ядерной материи. В результате наличия тех или иных структурных особенностей проявляется плотностная чувствительность эффективного протонно-ядерного взаимодействия, поскольку последнее «включается» при различной плотности ядерной материи.

Большинство достаточно успешных расчетов по рассеянию нуклонов основывается, как уже отмечалось, на приближении локальной плотности (обозначаемом в англоязычной литературе сокращением LDA). При этом применяется, в частности, эффективное взаимодействие, базирующееся на G -матрице бракнеровского типа, конструируемой для бесконечной ядерной материи. В этом случае во взаимодействие включаются коррекции плотностной зависимости, обусловленные принципом Паули и некоторыми другими эффектами ядерной среды (см., например, [58]).

В релятивистском представлении обсуждаемая протонно-ядерная система должна рассматриваться, строго говоря, в рамках релятивистской квантовой теории поля взаимодействующих нуклонов и мезонов или, в конечном счете, в терминах кварков и глюонов посредством квантовой хромодинамики. Подход, основанный на релятивистской квантовой теории, можно считать успешно и разносторонне развивающимся (см., например, [67, 68, 80–87]). Однако следование по пути квантовой хромодинамики, хотя и наиболее привлекательно в теоретическом плане, является довольно сложным с точки зрения конкретных расчетов и практической реализации, что видно, например, из [88, 89].

Для того чтобы установить связь с упрощенными нерелятивистскими теориями рассеяния и в то же время ввести некоторую степень лоренцевой инвариантности, в ряде исследований конструируют полурелятивистское уравнение движения для системы p – A (см. [90]). При этом мишень A представляется нерелятивистским объектом, а налетающий протон p описывается однопольным дираковским гамильтонианом. Тогда полурелятивистское уравнение движения в случае пренебрежения кулоновскими силами приобретает следующий схематический вид:

$$[\alpha \cdot p + \beta(m + \sum_{i=1}^A v_{pi}) + H_A] \Psi = E\Psi. \quad (5.1)$$

Здесь α и β – обычные матрицы Дирака, а m – масса протона, что находится в полном совпадении с символами уравнения (4.2). В выражении (5.1) v_{pi} обозначает взаимодействие между налетающей частицей p и нуклоном мишени i , H_A – нерелятивистский многотельный гамильтониан ядра-мишени.

При решении обсуждаемого полурелятивистского уравнения (5.1) предполагается, что налетающая частица и нуклоны мишени различаются, так что общая волновая функция Ψ может быть факторизована в виде произведения четырехкомпонентной волновой функции Дирака для налетающей частицы и нерелятивистской многотельной волновой функции для ядра-мишени в шредингеровском представлении.

Как известно, уравнение движения в нерелятивистской теории дает только одну волновую функцию системы. Однако применение релятивистского уравнения Дирака с включением частиц, имеющих спин 1/2, приводит уже к системе волновых функций. В соответствии с тем, что входящие в релятивистское (4.2) или полурелятивистское (5.1) уравнения матрицы Дирака α и β являются четырехмерными матрицами, то и волновые функции Ψ , например, в (5.1), могут иметь четыре компонента [15]. При этом в случае выполнения некоторых условий допускается сокращение числа компонентов волновой функции, что будет обсуждаться в дальнейшем.

Конечно, можно сближать или, наоборот, удалять друг от друга две позиции в анализе ядерной материи: нерелятивистскую и релятивистскую. Однако при этом сохраняется важная отличительная особенность двух рассматриваемых моделей. Так, традиционный (нерелятивистский) подход к ядерной структуре включает взаимодействие нуклонов посредством статических потенциалов. А важным достоинством предложений в рамках релятивистской теории поля является в первую очередь то, что мезонные степени свободы включаются явно как динамические координаты (см., например, [91]).

Как уже отмечалось, фундаментальной характеристикой подхода, основанного на уравнении Дирака, является то, что все потенциалы должны быть выбраны так, чтобы они отвечали лоренцевой инвариантности. Структура уравнения Дирака, записанного в полном виде, достаточно сложна, что можно видеть в работах [78, 90, 92] и др. Однако оптическая дираковская модель часто ограничивается только двумя главными потенциалами, как это уже демонстрировалось выше, в уравнении (4.2). Один из потенциалов, $U_s(r)$, преобразуется подобно лоренцеву скаляру, а другой, $U_v(r) \equiv U_0(r)$, подчиняется преобразованию как временной компонент 4-вектора (см. [15, 42, 78, 80, 92, 93] и др.). При этом, как уже подчеркивалось, U_s и U_v – большие величины во внутренней части ядра (несколько сотен МэВ) и противоположные по знаку. В (4.2) кулоновский потенциал U_C обычно определяется из экспериментальной зарядовой плотности ядра [78].

Принципиальным ограничением формализма, представленного уравнением (5.1), является нерелятивистская трактовка ядра-мишени. По существу, один из нуклонов описывается гамильтонианом Дирака, а другой (в двухтельной подсистеме рассеяния p – A) рассматривается нерелятивистским образом. Поэтому для того чтобы в вычисляемых величинах при сравнении их с экспериментом в процессе (p – A)-рассеяния выявить возможные релятивистские аспекты ядра-мишени, авторы работы [90] заменили нерелятивистскую волновую функцию ядра-мишени на релятивистскую. Из релятивистской волновой функции основного состояния ядра авторами той же работы конструировался соответствующий оптический потенциал, который затем и был введен в уравнение движения.

Известно, что вообще в релятивистском движении Дирака состояния движения частицы выражаются четырехкомпонентной функцией (дираковским спинором) [15, 20]. Так, и в работе [90] уравнение Дирака в случае упругого (p – A)-рассеяния включает четырехкомпонентную волновую функцию бомбардирующего протона. Решение этого уравнения вместе с асимптотическими граничными условиями указанной волновой функции позволили установить амплитуду (p – A)-рассеяния, из которой и были сконструированы наблюдаемые величины упругого рассеяния.

В релятивистской квантовой механике разработан специальный формализм, касающийся построения волновых функций уравнения Дирака [15, 20, 42]. Так, определенные элементы структуры волновых функций связываются с конкретными физическими явлениями. При рассеянии нуклона (в том числе протона) на четно-четных ядрах, предпочтительно в случаях замкнутых оболочек (и особенно для $N = Z$), решения релятивистских уравнений типа (4.2) существенно упрощаются из-за центральной симметрии потенциальной энергии [15, 94, 95 и др.]. Тогда волновая функция в (4.2) сведется к построению дираковского спинора типа

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F(\mathbf{r}) \\ G(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

В соответствии со своим положением в столбце (5.2) его составляющие часто называются верхними (ψ_U^D) и нижними (ψ_L^D) компонентами дираковской волновой функции $\psi(\mathbf{r}) \equiv \psi^D(\mathbf{r})$ (см., например, [78]). Тогда уравнение Дирака (4.2), как уже отмечалось, эквивалентно двум связанным уравнениям, соответственно для верхнего и нижнего компонентов дираковской волновой функции ψ^D [78].

Фактически во всех публикациях верхний компонент дираковской функции ψ^D в общем трактуется как схожий с соответствующей волновой функцией шредингеровского типа. Однако нижний компонент дираковской волновой функции совершенно отличен от волновой функции Шредингера.

Для того чтобы сравнить результаты оптической модели, основанной на уравнении Дирака, с результатами оптической модели, базирующейся на уравнении Шредингера,

обычно выполняют преобразование уравнения Дирака, приводя его к другой форме. Процесс подобного преобразования продемонстрирован в работах [78, 80]. Так, если пренебречь относительно малыми вкладами в уравнение (4.2), то окажется, что мы в первую очередь придем к уравнению только с верхним компонентом волновой функции Дирака $\psi_U^D(\mathbf{r})$. Это в основном связано с тем, что для нуклон-ядерного рассеяния две составляющие волновой функции, а именно ψ_U^D и ψ_L^D , можно считать, соответственно, большой и малой [92]. В итоге такого приближения получается уравнение релятивистского происхождения, но шредингеровского типа со спинowymi операторами Паули (4.2a) [47, 78, 80, 92]:

$$[p^2 + 2E(U + U_{so} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})]\psi^S = [(E - V_C)^2 - m^2]\psi^S. \quad (5.3)$$

Здесь ψ^S – новая волновая функция, где индекс S указывает на принадлежность к уравнению типа Шредингера. Эта функция связана с приведенным выше верхним компонентом дираковской волновой функции следующим соотношением [78]:

$$\psi_U^D(\mathbf{r}) = K(r)\psi^S(\mathbf{r}). \quad (5.4)$$

Коэффициент $K(r)$, в принципе, представляет собой сложное (интегральное) выражение внутри ядра [78, 92], но с очень простым асимптотическим поведением: $K(r) \rightarrow 1$, когда $r \rightarrow \infty$. Это обусловлено тем, что коэффициент $K(r)$ определяется потенциалами релятивистских полей, входящих в уравнение (4.2). Но так как эти поля имеют конечный диапазон, волновые функции ψ_U^D и ψ^S приобретают одинаковое асимптотическое поведение. Также фазовые смещения упругого рассеяния, определенные из первоначального уравнения Дирака (4.2), являются подобными тем, что вычисляются из уравнения (5.3), имеющего форму уравнения Шредингера.

Все это позволяет трактовать члены U и U_{so} уравнения (5.3) как соответствующие эффективные (центральный и спин-орбитальный) потенциалы традиционного уравнения Шредингера (см. лекцию 1). В то же время эти эффективные потенциалы конструируются из скалярных (U_s) и векторных ($U_v \equiv U_0$) компонентов релятивистских полей, входящих в уравнение (4.2). Таким образом, рассматриваемые эффективные потенциалы представляются вполне подходящими для сопоставления результатов нерелятивистской и релятивистской оптической модели [80, 96].

Разумеется, что все обсуждаемые модельные построения требовали практической проверки путем сопоставления с соответствующими экспериментальными данными, что многократно и осуществлялось. Это было необходимо, в частности, потому что расчеты с эффективным оптическим потенциалом шредингеровского типа (5.3), основанного на релятивистском уравнении Дирака (4.2), не являются полностью эквивалентными тем вычислениям, которые достигаются с самим уравнением Дирака (4.2). Дело в том, что искаженные волны, представленные теперь функцией ψ^S и генерируемые эффективным оптическим потенциалом в (5.3), становятся равными верхнему компоненту дираковской волновой функции ψ_U^D только в асимптотическом пределе (5.4). Во внутренней части ядра коэффициент $K(r)$ в выражении (5.4) представляет собой, что уже отмечалось, сложную редукцию указанных волновых функций движения частицы [78, 92]. Кроме того, как мы поясним ниже, эффективные оптические потенциалы U и $U_{s.o.}$ в уравнении (5.3), формально приведенном к шредингеровскому типу, в свою очередь значительно отличаются от обычно используемых оптических потенциалов в традиционном уравнении Шредингера для того же одночастичного движения. Тем не менее, даже эти достаточно заметные различия альтернативных потенциалов, как оказывается, приводят лишь к относительно малым расхождениям многих расчетных наблюдаемых величин в упругом рассеянии. Это происходит потому, что здесь в обоих случаях генерируются главным образом фазово-

эквивалентные асимптотические волновые функции. Однако соответствующие волновые функции внутри ядра являются действительно сильно различными во величине и фазе. А такое внутреннее различие уже может проявиться в неупругом рассеянии и в аналогичных расчетах для таких реакций, как, например, (p, n) или $(p, 2p)$, которые необязательно локализируются на поверхности ядра.

Вещественные части оптического потенциала традиционного шредингеровского уравнения (1.24) будем для определенности называть в соответствии с их формой потенциалами Вудса–Саксона (ВС – см. лекцию 1). А вещественную часть эффективного потенциала релятивистского уравнения Шредингера (5.3) уже нельзя подогнать сходным образом. Но эту часть потенциала, согласно [82], можно заменить эмпирической конструкцией, состоящей из двух частей. Одна из них (притягивающий потенциал) имеет форму ВС, а другая часть (отталкивающий потенциал) построена на иной геометрии, в общем не совместимой с формой ВС.

Следуя этому подходу, вещественную часть центрального оптического потенциала, обозначенного в (5.3) символом U , можно аппроксимировать ее феноменологическим эквивалентом [82]:

$$ReU_c = V_1 f_1(r) - V_2 [f_2(r)]^n, \quad (5.5)$$

где $n = 1$ или 2 . Указанные здесь функции f_1 и f_2 имеют сходный тип. В принципе, обе функции выражают радиальную часть плотности ядра в основном состоянии с теми или иными параметрами.

Кроме модификации параметров распределения ВС, в (5.5) присутствует также и квадратичная зависимость формфакторов ВС, обеспечивающая отталкивающий член оптического потенциала. Представленная здесь нерелятивистская феноменология позволяет, как мы увидим ниже, в значительной степени имитировать оптический потенциал релятивистской модели.

Мы уже демонстрировали некоторую роль релятивизма, проявляющуюся в описании волновой функции рассеиваемого протона (5.2, 5.4). При обсуждении полурелятивистского уравнения движения (5.1) мы также указывали на возможные эффекты релятивизма и в волновой функции мишени. В конечном счете подобные эффекты отражены в формуле (4.1). Если же в этой формуле допустить существенное упрощение и предположить равенство

$$\rho_s = \rho_v, \quad (5.6)$$

то это будет означать, что мы пренебрегаем нижними компонентами волновой функции типа (5.2), но теперь уже характеризующей описание ядра мишени (см., в частности, [90]). Строго же говоря, в полной релятивистской модели основное состояние мишени представляется четырьмя ядерными плотностями, если при этом нейтроны и протоны рассматриваются по отдельности (см. [80, 90] и др.).

Выражение (5.3) является лишь одним из способов приведения (в сокращенном виде) уравнения Дирака (4.2) к типу уравнения Шредингера. В литературе существует целый набор выражений, частично сходных с (5.3), а частично варьирующихся в зависимости от степени приближения подобного преобразования, способов представления уравнения Дирака и Шредингера, а также других факторов.

В приведенном уравнении Дирака (4.2) релятивистские потенциалы ограничены лишь двумя членами: лоренцевыми скалярным и векторным потенциалами. Существует два наиболее распространенных способа их получения. Один из них заключается в том, что параметры этих оптических потенциалов, имеющих в принципе тот же тип формфакторов, что и нерелятивистские потенциалы, устанавливаются, как уже отмечалось, путем подгонки расчетных результатов к экспериментальным данным для дифференциальных

сечений и анализирующей способности в упругом рассеянии протонов. Это было вполне успешно осуществлено, например, в работах [71, 76, 83]. Другой тип получения скалярного и векторного потенциалов основан на различных подходах в рамках релятивистской импульсной аппроксимации с применением NN -взаимодействия (представленного в терминах лоренцевой инвариантности) и с включением основного состояния ядра – см. формулу (4.3), а также публикации [47, 70, 82, 90, 97] и др.

Релятивистское уравнение Дирака, как правило, является более полным по сравнению с уравнением Шредингера, поэтому приведение первого уравнения к «эквивалентному» уравнению шредингеровского типа практически всегда связано с операцией сокращения, т.е. отбрасывания тех или иных компонентов уравнения Дирака. Обычно пренебрегают теми компонентами, которые в рассматриваемых случаях можно предполагать малыми, а это уже зависит от конкретного изучаемого процесса. В связи с этим преобразование одного вида уравнения в другой связано с рядом оценочных факторов. Так, конструирование уравнения шредингеровского типа (5.3) обычно осуществляют, как уже отмечалось, пренебрегая в первую очередь нижними компонентами (на основе предположения их малости) волновой функции одночастичного движения в уравнении Дирака (4.2).

Другой способ трансформации последнего релятивистского уравнения в «эквивалентное» шредингеровское уравнение базируется на применении так называемого представления Фолди–Вутхайзена [15, 98]. В рамках такого подхода также используются только большие компоненты соответствующей волновой функции. Однако, помимо этого, здесь включается еще другое, более существенное ограничение. Его суть состоит в соблюдении следующего неравенства [98]:

$$k \sim U_0 / m \sim U_s / m \sim (v/c)^2 \ll 1. \quad (5.7)$$

Здесь основные величины те же самые, что и в (4.2), включая $U_0 \equiv U_v$.

Оба указанных приема в получении релятивистского уравнения Шредингера обеспечивают для центрального члена оптического потенциала U , как в уравнении (5.3), наличие линейной зависимости от величины U_0 (т.е. U_v) и U_s . Кроме того, в обоих типах рассматриваемого преобразования в шредингеровском уравнении появляется член, представляющий собой спин-орбитальное взаимодействие [98]. Этот член, приведенный, например, в выражении (5.3), получается автоматически из уравнения Дирака. Примечательно, что в потенциалах U_s и U_0 нет эксплицитной спиновой зависимости и что, согласно [73, 98] и др. работам, эффективный спин-орбитальный потенциал образуется исключительно в результате смешивания потенциалов U_s и U_0 .

Отметим, кстати, что введение спин-орбитальной части с известной томасовской формой в феноменологический оптический потенциал нерелятивистской теории рассеяния по существу также основывалось на уравнении Дирака. Правда, последнее уравнение вначале применялось для движения электронов, откуда и была взята по аналогии форма спин-орбитальной части одночастичных потенциалов для двух моделей: оптической и оболочечной. Что касается силы и знака этих частей потенциалов, то они в каждом случае подбирались эмпирически (см., например, [99]).

Указанная выше процедура Фолди–Вутхайзена, предназначенная для аппроксимации уравнения Дирака, по существу сводится к тому, что релятивистские эффекты учитываются как поправки [15]. Вообще говоря, эта процедура приводит к правильному построению эквивалентного шредингеровского оптического потенциала. Действительно, она позволяет расщепить дираковский релятивистский потенциал на центральную и спин-орбитальную составляющие, качественно соответствующие стандартным требованиям уравнения Шредингера. Более того, в рамках этого преобразования в эквивалентном шредингеровском потенциале автоматически появляется

член, который, в принципе, может быть идентифицирован как поправка Дарвина [15, 78, 80, 98]. В традиционном нерелятивистском подходе ее вводят феноменологически. Всю рассмотренную здесь качественно структуру релятивистского уравнения Шредингера мы проанализируем детально несколько ниже, когда будем использовать более строгую процедуру преобразования уравнения Дирака. Сейчас же только отметим, что преобразование Фолди–Вутхайзена приемлемо в основном только для качественных оценок, поскольку неравенство (5.7) можно принять лишь условно. Это связано с тем, что входящие в него отношения U_s/m , U_0/m внутри ядра нельзя считать малыми (см. [98]).

В простом релятивистском подходе допускаются только два лоренцевых компонента: скалярный и четвертый векторный. В рамках этого подхода можно выделить два основных класса оптических потенциалов. Один из них включает потенциалы, которые зависят только от энергии, а к другому классу принадлежат потенциалы, содержащие зависимости как от энергии, так и от импульса (см. [100]). При усложнении релятивистского нуклон-ядерного взаимодействия допускается увеличение числа лоренцевых компонентов. Кроме того, можно эксплицитно ввести зависимость ядерных полей не только от импульса падающего нуклона k , но также и от импульса Ферми k_F [101]. Напомним, что в этой лекции для всех рассмотрений используется система измерений, в которой $\hbar = c = 1$, так что импульс частицы p и ее волновое число k друг с другом совпадают. Величина $k_F(r)$ связана, как известно (см. [1, 8, 23, 59] и др.), с эмпирической ядерной плотностью $\rho(r)$. Соотношение между k_F и ρ включается, например, в [1], в нерелятивистское NN -взаимодействие, а следовательно, и в нерелятивистский оптический потенциал. Конструирование нуклон-нуклонных и нуклон-ядерных сил с учетом зависимости от k_F в случае нерелятивистского и релятивистского подходов имеет по существу одну и ту же основу [101]: введение приближения локальной плотности (LDA).

Это же самое приближение в работе [101] учитывалось также и в случае преобразования уравнения Дирака в эквивалентное уравнение шредингеровского типа. Адекватность такого превращения контролировалась на основании того, что оптические потенциалы преобразованного уравнения Шредингера и первоначального уравнения Дирака приводили к одним и тем же фазовым сдвигам упругого рассеяния. В продолжение этого заметим, что одинаковые фазовые сдвиги в свою очередь обеспечивают практически однотипные результаты упругого рассеяния. Это отмечалось, в частности, в [1] при рассмотрении нерелятивистских методов описания рассеяния. Там подчеркивалось, что наблюдаемые характеристики упругого рассеяния по существу зависят только от асимптотической волновой функции для рассеянной частицы. Такая зависимость известна из многих примеров анализа рассеяния протонов промежуточных энергий [102, 103]. Из всего сказанного следует, что близость фазовых сдвигов упругого рассеяния, полученных в двух подходах (дираковского и шредингеровского уравнений), свидетельствует об адекватности преобразования [101] одного оптического потенциала в другой, но еще не доказывает, насколько реалистичны сами эти потенциалы. Достоверность потенциалов, сконструированных любым способом, устанавливается в конечном счете только в результате их использования в расчетах, которые затем сравниваются с экспериментальными данными, особенно связанными со спином. На рассмотрении подобных критериев мы остановимся в дальнейшем более детально.

ЛЕКЦИЯ 6

О конвертировании релятивистского уравнения в «шредингеровский эквивалент»

В предыдущей лекции мы уже отметили, что можно выделить по крайней мере две релятивистские модели, позволяющие оценить силы скалярного и векторного потенциалов. Одна из них построена на феноменологическом анализе упругого рассеяния. А другая модель основывается на импульсной аппроксимации с использованием релятивистских t -матриц, в построении которых включаются различные типы связи (см., в частности, [104]).

Остановимся вначале на первой модели и рассмотрим конкретные достижения феноменологического поиска оптических потенциалов на основе анализа экспериментов по протон-ядерному рассеянию. Согласно многим исследованиям, целесообразно сосредоточиться главным образом на сферических ядрах-мишенях. Такими, как известно, являются многие четно-четные ядра, у которых замкнуты или почти замкнуты протонные и нейтронные оболочки. По этой причине во многих работах с релятивистской феноменологией используются такие ядра, как ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{40}\text{Ca}$, ${}^{90}\text{Zr}$, ${}^{208}\text{Pb}$ и др.

Установленные в результате подгонки к эксперименту оптические потенциалы для практического применения должны, как и в случае нерелятивистской феноменологии, также охватывать очень широкий диапазон энергии частиц (в данном рассмотрении – прежде всего протонов). В дальнейшем решение уравнения Дирака (4.2), содержащего скалярный оптический потенциал U_s и векторный оптический потенциал U_v , а также кулоновский потенциал U_C , позволяет в каждом конкретном случае определить функцию ψ , представляющую собой искаженные волны. Следующий шаг обычно состоит в использовании этих искаженных волн для неупругого рассеяния, а также, вообще говоря, и для других реакций типа $A(a, b)C$ или даже $A(a, a' b)D$. В частности, это вполне допустимо, например, в случае реакции $(p, 2p)$. Тогда в результате применения уравнения (4.2) можно получить генерируемые искаженные волны в обоих каналах: входном и выходном [105]:

$$\psi \rightarrow \chi_a^{(+)}, \chi_{a'}^{(-)}, \chi_b^{(-)}. \quad (6.1)$$

Для реакции $(p, 2p)$ в волновых функциях (6.1) индексы a и b обозначают протоны. При этом a отвечает падающей частице и, соответственно, a' и b – вылетающим частицам.

С точки зрения распространения релятивистского подхода большой интерес представляют такие реакции, как (p, p') , (e, e') , $(p, 2p)$, (e', ep) , (p, π) , (γ, π) , (d, d) и многие другие (см., в частности, [15, 28, 32, 47, 71, 73, 76, 78, 80, 82, 85, 90, 96–110]). Во всех этих исследованиях может использоваться и нередко действительно используется лоренцев 4-векторный (временной компонент) и скалярный оптический потенциалы при решении уравнения Дирака (4.2). Однако для того чтобы иметь возможность анализировать такую обширную совокупность реакций в рамках релятивистской модели, необходимо иметь глобальные оптические потенциалы с параметрами, зависящими от энергии и массового числа. Требуемые оптические потенциалы Дирака должны обеспечить хорошее описание данных упругого рассеяния, в частности, протонов в широком диапазоне энергии (E) и массовых чисел (A).

Такие глобальные оптические потенциалы для набора атомных ядер были получены с применением дираковской феноменологии в работе [109]. Как уже предполагалось, эти потенциалы были установлены в результате подгонки расчетов (выполненных в рамках дираковской оптической модели) к экспериментальным данным по упругому рассеянию протонов. Экспериментальные данные были систематизированы авторами в широком диапазоне энергий протонов (от 65 до 1040 МэВ) на основе многочисленных измерений, представленных в литературе. Глобальность подхода заключалась также в проведении интерполяции и экстраполяции полученных потенциалов и в тестировании проведенной

процедуры. Представленный в итоге обширный набор параметризованных дираковских потенциалов предназначен для анализа многих реакций, в том числе и указанных выше.

Рассматриваемый подход в получении релятивистских оптических потенциалов принято называть стандартной скалярно-векторной (SV) моделью дираковской феноменологии или просто стандартной SV-моделью [111, 112]. Для наглядной связи с такой формулировкой нередко скалярный и векторный оптические потенциалы упрощенно обозначают как S и V , соответственно, [104, 110, 112] или для большей ясности указывают при этом функциональную зависимость: $S(r, E)$ и $V(r, E)$ [109, 111].

Представленные обозначения S и V используются не только в феноменологических подходах, но также часто применяются и в релятивистских модельных представлениях, например, в так называемой $(\sigma + \omega)$ -модели (см., в частности, [67, 104]). Цель такого обозначения заключается в том, чтобы максимально возможно продемонстрировать отличие дираковских потенциалов от тех или иных потенциалов шредингеровского типа.

Как уже отмечалось, конвертирование уравнения Дирака (4.2) в уравнение шредингеровского типа (5.3) производится разными способами и с различной степенью приближения. При этом в работе [113] подчеркивается, что потребность в подобной конвертации связана прежде всего с тем, что подавляющее число исследований, особенно эмпирических, выполнено в рамках нерелятивистской оболочечной модели или в рамках нерелятивистской оптической модели. По выражению автора работы [113], в литературе существует ряд различных кандидатов, претендующих на название «шредингеровский эквивалент» усредненного потенциала. Все их многообразие определяется тем, как представлены элементы уравнения (5.3) или аналоги этих элементов.

При конвертировании феноменологического типа уравнения Дирака (4.2) получается, естественно, и феноменологический образец «шредингеровского эквивалента» волнового уравнения (5.3). А компоненты последнего уравнения приобретают ту зависимость от потенциалов S и V , которая соответствует оптимальной подгонке последних к предоставленной для этой цели всей совокупности экспериментальных данных по упругому рассеянию протонов.

В качестве примера ниже мы приведем конкретизированные потенциалы эффективного уравнения Шредингера. Это уравнение получено в результате превращения уравнения Дирака (4.2) в уравнение второго порядка, согласно работе [109]:

$$[\nabla^2 + (E - V_C)^2 - m^2 - 2E (U_{cent} + U_{so} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})]\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (6.2)$$

Как видно из сравнения с выражением (5.3), здесь дается лишь несколько измененная его форма, которая также представляет уравнение, эквивалентное шредингеровскому типу. Сохранены и основные обозначения формулы (5.3). Функция ψ в (6.2) по-прежнему характеризует верхний компонент искаженного дираковского спинора, описывающего относительное движение частиц.

Скалярный $U_s \equiv S$ и векторный $U_v \equiv V$ потенциалы, содержащиеся в (4.2), имеют соответствующие формфакторы, как это обозначено в выражениях (4.3) и (4.4). Силы дираковских потенциалов и геометрические параметры их формфакторов в феноменологическом анализе устанавливаются, как уже отмечалось, в результате подгонки к экспериментальным данным упругого рассеяния в процессе решения уравнения (6.2). При этом, как мы уже подчеркивали, потенциалы S и V включают в себя не только вещественные, но и мнимые части, представляющие поглощение (см., в частности, [80, 81, 104, 109, 111, 112]), т.е.

$$S = S_R + i S_I, \quad (6.3)$$

$$V = V_R + i V_I. \quad (6.4)$$

Наличие указанного поглощения установлено из подгоночной процедуры [84], по существу не отличающейся от той, что давно апробирована в нерелятивистской феноменологии. Структура потенциалов, показанная в формулах (6.3, 6.4), имеет не только эмпирическую основу, но также находит и теоретическую поддержку в рамках $(\sigma+\omega)$ -модели [114].

В процессе конструирования в рамках дираковской феноменологии [109] в очень широком диапазоне энергий ($E_p = 65\text{--}1040$ МэВ) глобальные релятивистские потенциалы, особенно их мнимые составляющие, не могут иметь единой геометрии для формфакторов при всех рассматриваемых значениях E_p . Как и в случае нерелятивистской феноменологии, дираковские мнимые части S_I и V_I в принципе должны содержать два члена: объемный и поверхностный. Поэтому в случае расширенного интервала E_p , рассматриваемого в [109], мнимые части в формулах (4.3) и (4.4) превращаются в двухкомпонентные выражения. Один из компонентов имеет формфактор, представленный симметризованными распределениями Вудса–Саксона, а формфактор другого компонента характеризуется производной от указанного распределения. Последний формфактор, как и в случае нерелятивистского подхода, играет доминирующую роль при низких энергиях. Кроме того, предусматривается возможность введения для различных формфакторов разных геометрических параметров. Силы для объемных и поверхностных членов, аналогично, приобретают независимые значения. Разумеется, что соответствующие силовые и геометрические характеристики также оказываются иными для вещественных частей S_R и V_R (6.3, 6.4). С целью практической реализации всей кратко обозначенной здесь подгоночной процедуры в рамках дираковской феноменологии была составлена специальная компьютерная программа [109].

Преобразование уравнения Дирака (4.2) производится, как уже отмечалось, в уравнения второго порядка, представленные выражениями (5.3) и (6.2) или более упрощенными формулами (см. [92, 98, 101, 112]). Как подчеркивается в [112], эти уравнения с точки зрения радиальной формы близки к волновому уравнению движения с релятивистской кинематикой, которое, согласно работе [115], все еще можно считать уравнением шредингеровского типа.

Для выражения членов уравнения (6.2) через потенциалы S и V создан компьютерный код “Schrödinger equivalent” (см. [116]). В соответствии с работами [78, 109, 116] представим в детализированном виде главные операторы и их составляющие, включенные в уравнение (6.2). Входящие в него потенциалы часто называют потенциалами шредингеровского типа, хотя, строго говоря, название касается только их основных формальных признаков, а по существу потенциалы сохраняют свое релятивистское происхождение. Начнем с потенциала, представленного в (6.2) как U_{cent} , индекс которого означает «центральный» (см. [109, 116]). В работах [78, 80] этому потенциалу присвоено другое название: «эффективный». Кроме того, следует отметить, что авторы работы [112] определение «центральный» дают тому же самому потенциалу, но с коэффициентом, т.е. входящему в уравнение (6.2) произведению $2EU_{cent}$. Все это указывает на то, что в сравнительном формализме пока не выработано единых стандартных определений.

Итак, согласно [109],

$$U_{cent} \approx (1/2E)(2EV + 2mS - V^2 + S^2 - 2V_C V + 2EU_D). \quad (6.5)$$

Приблизительное равенство означает, что здесь включены только наиболее важные члены центральной части «эквивалентного» потенциала (см., например, [116]). Однако, если ограничиться лишь рамками SV -модели, то в (6.5) можно допустить и точное равенство [109]. Это связано с тем, что опущенные в (6.5) члены касаются относительно малого тензорного потенциала [116]. В более общем (по сравнению с SV -моделью) релятивистском

подходе все указанные малые члены учтены и детально представлены в центральном оптическом потенциале (см. [78]).

В выражение (6.5), как видно, входит кулоновский потенциал V_C , но только в «перекрестный» член с участием V , т.е. произведение $V_C \cdot V$. Этому члену иногда дают отдельное обозначение [112]:

$$U_{cv} = -2V_C V, \quad (6.6)$$

а также присваивают и специальное название: кулоновская поправка [78]. Вообще говоря, этот член комплексный [78], поскольку входящий в произведение векторный потенциал V , как отмечалось, является комплексным. Если же рассматриваются энергии протонов $E_p \geq 160$ МэВ, то согласно [116], данные упругого рассеяния оказываются малочувствительными ко всем составляющим центрального потенциала, которые определяются кулоновскими силами. В результате этого при достаточных величинах E_p такими составляющими потенциала нередко вообще пренебрегают.

Уравнение (6.2) иногда просто называют обычным релятивистским уравнением Шредингера со спинowymi операторами Паули (4.2а) [47]. В этом случае U_{cent} (6.5) трактуют как центральную часть релятивистского оптического потенциала. При этом особо выделяют главные линейные члены выражения (6.5):

$$U_{cent}^{(1)} = V + (m/E) S \quad (6.7)$$

и считают, что при выполнении условия (5.6) величина $U_{cent}^{(1)}$ (6.7) по существу определяет то же самое, что и центральный компонент традиционного нерелятивистского потенциала обычной оптической модели (см. [47]).

Однако, как видно из (6.5), U_{cent} содержит и другие члены. Согласно [78], их следует рассматривать как релятивистские особенности, полученные в макроскопической оптической модели Дирака. Для того чтобы убедиться, что эти особенности не обусловлены специфическим проявлением макроскопического метода в дираковской феноменологии, обратимся к другому источнику получения релятивистских оптических потенциалов.

Как и фолдинг-модель в случае нерелятивистского подхода, импульсная аппроксимация (наряду с феноменологическим методом) может служить при значительных E_p вполне надежной основой для получения оптических потенциалов Дирака. Так, в работе [117] показано, что релятивистская импульсная аппроксимация приводит к хорошему описанию данных упругого рассеяния, особенно их распределений, зависящих от спина. При этом соответствие между расчетом и экспериментом существенно улучшается по сравнению с тем, что обеспечивает аналогичный нерелятивистский подход. Поскольку в этом случае использован разработанный в [118] метод конструирования дираковских оптических потенциалов в рамках импульсной аппроксимации на основе амплитуд свободного NN -взаимодействия, то хорошего соответствия между расчетами и экспериментом для (p, p) -рассеяния следует ожидать только при $E_p > 300$ МэВ. Действительно, такое соответствие в [117] и было достигнуто для $E_p = 500$ и 800 МэВ.

Сейчас для нас наибольший интерес представляет релятивистская фолдинг-модель [117] с точки зрения сравнения ее центрального потенциала с аналогичным потенциалом, выведенным из феноменологии Дирака (6.5). Дело в том, что в работах [117, 118] установлен дираковский эквивалент tp -аппроксимации для получения амплитуд рассеяния. Ранее подобный формализм был выработан в целом ряде исследований (см. [47]) для получения нерелятивистского оптического tp -потенциала. Используя полученные релятивистские инварианты NN -амплитуд и привлекая набор измерений по упругому рассеянию электронов, авторы работ [117, 118] смогли сконструировать и сопоставить

непосредственно релятивистские и нерелятивистские потенциалы без конвертирования уравнения Дирака в его «эквивалент», обладающий шредингеровской формой.

Теперь мы также можем сравнить два типа релятивистских центральных потенциалов: феноменологический (6.5) и полумикроскопический [117]. Кроме линейной части (6.7), выделенной из феноменологического центрального потенциала (6.5), следует обратить внимание также на наличие в нем квадратичных составляющих:

$$U_{cent}^{(2)} = (S^2 - V^2) / 2E. \quad (6.8)$$

Релятивистский эффективный центральный потенциал в его полумикроскопическом виде также содержит аналогичные квадратичные члены, как следует из [117]. В то же время, согласно последней работе, из сравнения релятивистского и нерелятивистского потенциалов ясно, что подобные компоненты отсутствуют в нерелятивистском потенциале. Если обратиться к выражениям (6.3) и (6.4), то станет очевидным, что через посредничество квадратичных членов S^2 и V^2 , как подчеркивается в [78], происходит смешивание вещественных и мнимых частей оптического потенциала.

Из выражения (6.5) следует, что в центральный потенциал входит еще и дарвиновский член, обозначаемый обычно как U_D или U_{Darwin} . Выше мы уже указывали на наличие такого компонента релятивистского потенциала. Из сравнения полумикроскопических релятивистского и нерелятивистского потенциалов, полученных в [117], видно, что компонент U_D появляется естественным образом в первом случае и отсутствует во втором. Вообще говоря, дарвиновский член оказывается нелокальным [78].

Для того чтобы определить компонент U_D , нам потребуется ввести довольно универсальное выражение, которое будет играть существенную роль и в дальнейшем формировании другого очень важного элемента оптического потенциала: спин-орбитальной составляющей. Это выражение следующее [78, 109]:

$$A(r) = (E + m + S - V - V_C) / (E + m), \quad (6.9)$$

где обозначения m и E остаются теми же самыми, что и в формулах (4.2, 5.1, 5.3, 6.2, 6.5, 6.7, 6.8). Другие символы также сохраняются неизменными по сравнению с выражениями (6.3–6.8). В связи с этим следует заметить, что в ранней публикации по этой же теме [73] обозначение $A(r)$ относилось только к числителю в формуле (6.9). Правда, чтобы избежать двусмысленного толкования в работах [96, 98] указанному числителю формулы (6.9) приписывается другой символ – $D(r)$. Отметим еще, что всему выражению (6.9) часто дается также и другое обозначение – $B(r)$ (см. [80, 117, 119]). По поводу фигурирующего здесь кулоновского потенциала V_C следует подчеркнуть, что в некоторых обсуждаемых формулах он присутствует, как, например, в (6.9), а в других случаях им пренебрегают [119].

Что касается проявления величины $A(r)$ (6.9), то оно заключается в том, что значение $A(r)$ служит важнейшим элементом, из которого состоит перенормировочный коэффициент $K(r)$ в формуле (5.4). Эта формула, как уже отмечалось, модифицирует волновую функцию уравнения шредингеровского типа относительно верхней (большой) составляющей волновой функции уравнения Дирака. Согласно работам [78, 80, 119, 120],

$$K(r) \sim [1 + (S - V) / (E + m)]^{1/2}, \quad (6.10)$$

что представлено на основе выражения (6.9), в котором произведена перегруппировка составляющих его членов и опущен кулоновский потенциал V_C . Из (6.10) ясно, что демонстрируемый там фактор, входящий в $K(r)$, стремится к единице на больших расстояниях от центра ядра. К каким же последствиям внутри ядра сводится роль этого фактора, мы обсудим в дальнейшем. Сейчас же отметим только, что формулы (5.4) и (6.10)

действительно подкрепляют высказанное ранее утверждение, что при $r \rightarrow \infty$ верхние компоненты одночастичной волновой функции Дирака в общем-то являются подобными соответствующей волновой функции «эквивалентного» уравнения Шредингера.

Но главная физическая суть величины $A(r)$, представленной выражением (6.9), состоит в том, что именно величина $A(r)$ является одним из важнейших элементов, обеспечивающих связь верхнего и нижнего компонентов одночастичной волновой функции Дирака (5.2), как показано в работах [78, 120]. Кроме того, $A(r)$ представляет собой непосредственный перенормировочный коэффициент для нижних (малых) компонентов волновых функций связанного состояния при сопоставлении двух формализмов (релятивистского и нерелятивистского), что приобретает важнейшее значение для описания рассеяния электронов [108]. По этому случаю еще раз подчеркнем, что наиболее продуктивный аналитический метод, предлагаемый нами, в частности в [1], состоял именно в комбинации рассеяния протонов и электронов.

После того как мы в общих чертах познакомились с физической ролью величины $A(r)$, продемонстрируем использование этой величины для конструирования различных компонентов оптического потенциала. Так, в макроскопическом подходе, согласно [78, 109, 116], дарвиновский (U_D) и спин-орбитальный ($U_{s.o.}$) компоненты оптического потенциала приобретают следующий вид:

$$U_D = (1/2E) \left[-\frac{1}{2r^2 A} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dA}{dr} \right) + \frac{3}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 \right], \quad (6.11)$$

$$U_{s.o.} \approx (1/2E) \left[-\frac{1}{rA} \left(\frac{dA}{dr} \right) \right]. \quad (6.12)$$

Последнее выражение является приблизительным, поскольку в нем опущен относительно малый член, определяемый тензорным потенциалом (его роль показана в [78]). В феноменологическом анализе представленный в (6.9) вклад кулоновского потенциала V_C в выражение $A(r)$ оценивается как малый. Поэтому этим потенциалом часто в формулах для U_D и $U_{s.o.}$ практически пренебрегают [80, 116, 119]. Следует еще подчеркнуть, что в других подходах выражения для U_D и $U_{s.o.}$ приобретают заметно отличный вид по сравнению с (6.11) и (6.12), при этом достаточно сильные расхождения наблюдаются также в случае U_{cent} (см., в частности, [73, 80, 96, 98, 112, 117]). Для подобных расхождений имеется, как уже отмечалось, целый ряд причин. Версия релятивистских потенциалов, сконструированных по шредингеровскому образцу, не является однозначной и единственной. Уравнение Дирака (4.2) и дифференциальное уравнение второго порядка (6.2), хотя и приводят к сопоставимым фазовым сдвигам упругого рассеяния, не обладают точно эквивалентными потенциалами из-за специфических отличительных свойств этих уравнений (см., например, [121]).

Однако, несмотря на все указанные неоднозначности, ясно выделяется следующее обстоятельство. Так, расхождения «эквивалентных» шредингеровских потенциалов, полученных в эмпирическом и теоретическом анализах, действительно оказываются вполне заметными. Речь идет о вещественных оптических потенциалах при упругом рассеянии протонов с энергией около 180 МэВ на ядре ^{40}Ca [101]. В то же время вся совокупность этих результатов, основанных на релятивистском формализме, в целом особенно резко контрастирует с вещественным потенциалом, установленным для аналогичного случая в рамках традиционного нерелятивистского подхода (см. [73]).

Релятивистский потенциал V представляется отталкивающим, каковым бы он являлся, если бы происходил от обмена нейтральным векторным мезоном. При этом потенциал S считается притягивающим, поскольку трактуется как возникающий из-за

обмена нейтральным скалярным мезоном. В связи с этим два этих потенциала в принципе гасят друг друга при формировании линейной части эффективного центрального потенциала (6.7). В то же время, согласно выражению (6.9), оба рассматриваемых потенциала (V и S), наоборот, складываются, усиливая друг друга в спин-орбитальном (6.12) и дарвиновском (6.11) потенциалах (см., в частности, [73, 120]).

Однако, несмотря на то, что разные компоненты релятивистского оптического потенциала различаются комбинациями образующих потенциалов V и S , имеется и главное единое свойство членов оптического потенциала. Оно заключается в том, что все компоненты оптических потенциалов конструируются из одних и тех же элементов: V и S . Таким образом, релятивистский подход совершенно определенно демонстрирует фундаментальную связь между центральным и спин-орбитальным эффективными потенциалами [80, 122]. В то же время спин-орбитальный потенциал и компоненты центрального потенциала, как известно, трактуются в нерелятивистском подходе как вполне независимые.

Все основные положения, сформулированные выше, касаются прежде всего макроскопических моделей, использованных в рамках дираковской и шредингеровской феноменологии. Однако оказывается, что сделанные здесь заключения являются также справедливыми и в случае полумикроскопической фолдинг-модели, когда осуществляется свертка NN -взаимодействия с соответствующими ядерными плотностями [117]. Тогда для релятивистского подхода центральный и спин-орбитальный потенциалы конструируются по определенному образцу: на базе одних и тех же двух ядерных плотностей. Это векторная плотность, устанавливаемая из упругого рассеяния электронов, и скалярная плотность, не имеющая нерелятивистского аналога (4.1). В ядрах эти две плотности можно считать приблизительно равными (5.6).

В аналогичной полумикроскопической модели центральный и спин-орбитальный потенциалы можно сравнивать друг с другом и в нерелятивистском подходе. Здесь выясняется наличие отличительных конструктивных особенностей [117].

Сопоставление полученных в [117] выражений для полумикроскопического центрального и спин-орбитального потенциалов в нерелятивистском и релятивистском подходах, а также сравнение выполненных расчетов с соответствующими данными упругого рассеяния позволяет сделать вывод об определенных релятивистских и нерелятивистских эффектах. На этих вопросах мы еще остановимся в дальнейшем.

Сейчас же, чтобы завершить вопрос о преобразовании уравнения Дирака в «эквивалентное» уравнение шредингеровского типа, мы должны еще остановиться на некоторых характеристиках макроскопических оптических потенциалов, имеющих релятивистское происхождение. В частности, следует дать формулировку общей релятивистской энергии протона E в системе центра масс, состоящей как из протона (масса m), так и ядра мишени (масса M). Это значение E входит во многие приведенные выше формулы, в частности, (5.3, 6.2, 6.5, 6.7–6.12). Оно определено в работе [116] с использованием компьютерной программы “Schrödinger equivalent” и является следующим:

$$E \equiv E_{с.ц.м.} = \left[m^2 + M(m + E_{лаб}) \right] / \left[(m + M)^2 + 2ME_{лаб} \right]^{1/2}, \quad (6.13)$$

где $E_{лаб}$ – энергия протона в лабораторной системе координат, а индекс в $E_{с.ц.м.}$ относится к системе центра масс. Именно приведенное значение энергии E должно содержаться в дифференциальном уравнении второго порядка для верхних компонентов волновой функции Дирака, характеризующей движение протона.

ЛЕКЦИЯ 7

Релятивистские и нерелятивистские эффекты в рассеянии протонов

Центральный оптический потенциал, устанавливаемый из релятивистского подхода, характеризуется прежде всего гашением двух компонентов: S и V , связанных между собой в той или иной форме. Один из возможных вариантов связи этих компонентов указан в формуле (6.7). В то же время спин-орбитальная составляющая оптического потенциала в соответствии с выражениями (6.12) и (6.9) определяется формой типа

$$U_{s.o.} \sim d(V - S) / dr. \quad (7.1)$$

Итак, спин-орбитальная часть оптического потенциала, в отличие от центральной, характеризуется не гашением, а, наоборот, включением большой по величине когерентной суммы компонентов S и V . Общей характеристикой рассмотренных частей оптического потенциала является то, что все они зависят от линейной комбинации величин S и V .

Далее следует подчеркнуть, что шредингеровский тип оптического потенциала, выведенного из уравнения Дирака, демонстрирует прямую связь между спин-орбитальной (6.12, 7.1) и различными центральными частями (6.5, 6.11) этого потенциала. Подобное заключение касается даже такого компонента центральной части потенциала, как кулоновская поправка (6.5, 6.6). Возникающая связь между основными составляющими оптического потенциала, используемого для рассеяния, оказывается проявлением внутренних свойств самой релятивистской модели (см., например, [122]). Для сравнения отметим здесь, что в аналогичных случаях конструирования традиционного нерелятивистского оптического потенциала его спин-орбитальная часть обычно выбирается по аналогии с томасовским членом в атомной физике (см., в частности, [3]). При этом оснований для простой и явной связи между спин-орбитальными и центральными частями оптического потенциала в нерелятивистских феноменологических подходах нет.

Многочисленные исследования показывают, что для нуклон-ядерного рассеяния в области энергии нуклонов, составляющей несколько сотен МэВ, релятивистская феноменология оказывается вполне успешной. Она приводит, как правило, к большим (по абсолютной величине) значениям вещественных составляющих скалярного (S_R) и векторного (V_R) потенциалов. Эти составляющие (6.3, 6.4) варьируются в пределах от -300 до -400 МэВ и от 200 до 300 МэВ, соответственно (см., в частности, [123]). Из-за того что скалярный и векторный потенциалы уравнения Дирака являются большими, при преобразовании этого уравнения в уравнение шредингеровского типа возникающая разница нелинейных членов центрального оптического потенциала (6.5, 6.8) оказывается немалой, как справедливо отмечается в [47]. В предельном случае, который реализуется приблизительно при $E_p = 500$ МэВ, специфическая роль релятивизма проявляется особенно четко.

В самом деле, поскольку величины S и V обладают, вообще говоря, противоположными знаками, то, естественно, следует ожидать, что спин-орбитальный потенциал, по крайней мере в некоторых случаях, может оказаться большим, как это видно из выражения (7.1). В то же время линейная часть центрального оптического потенциала (6.7), наоборот, при определенных условиях должна приобрести в свою очередь малые значения. Выяснилось, что в области $E_p = 500$ МэВ, действительно, сумма скалярного и векторного вкладов в вещественную центральную часть оптического потенциала (6.7) почти исчезает (см., в частности, [123]). В этом случае квадратичные члены релятивистского шредингеровского «эквивалентного» потенциала (6.5, 6.8) доминируют в его вещественной части [123]. Эти квадратичные члены отсутствуют в традиционном нерелятивистском формализме и представляют собой одну из важнейших черт,

характеризующих различие между релятивистским и нерелятивистским подходами [47, 123]. Присутствие указанных квадратичных членов в первом подходе может объяснить, в частности, почему релятивизм является особенно важным в некоторых случаях [123].

Гашение векторного и скалярного вкладов в линейную часть оптического потенциала типа (6.7) отмечается и в [117] при $E_p = 500$ МэВ. Это гашение – одно из наиболее выраженных проявлений и релятивистского потенциала, сконструированного на основе процедуры свертки в первом порядке приближения, которое обычно обозначается для краткости символом tp . Этот эффективный релятивистский центральный потенциал значительно отличается от нерелятивистского образца, полученного аналогичным методом [117]. Различие двух потенциалов состоит прежде всего в том, что только в релятивистском потенциале содержатся квадратичные зависимости, представленные следующим его компонентом, указанным в (6.8) в несколько другом обозначении:

$$U_{\text{квадр}} = (V_S^2 - V_V^2) / 2E. \quad (7.2)$$

Здесь V_S и V_V – скалярный и векторный члены, характеризующие соответствующие линейные составляющие того же релятивистского оптического потенциала. Для его получения была применена дираковская импульсная аппроксимация, в рамках которой указанные скалярный и векторный члены, а также их комбинации полностью определяются NN -амплитудами и ядерными плотностями [118]. При этом использованные амплитуды устанавливаются на основе экспериментальных данных по NN -рассеянию и приводятся к лоренцовой ковариантной форме, как того требует релятивистский формализм [124]. Полученное таким образом релятивистское NN -взаимодействие, а также измеренное при упругом рассеянии электронов протонное зарядовое распределение служат феноменологической базой для конструирования свертки типа tp (4.5) и, следовательно, для образования первого порядка релятивистского оптического потенциала.

Итак, в случаях применения дираковской феноменологии или же релятивистской импульсной аппроксимации получаемые эффективные оптические потенциалы приобретают качественно сходные свойства. Они, в частности, сводятся к тому, что наряду с линейной зависимостью составляющих центрального оптического потенциала, представленного в двух формулировках, неизбежно появляется и квадратичная зависимость тех же составляющих (6.8, 7.2), которая отсутствует в соответствующих нерелятивистских подходах.

Для демонстрации контрастных особенностей эффективных потенциалов, образованных на основе двух формализмов – релятивистского и нерелятивистского, остановимся на некоторых деталях решения приведенных ранее уравнений движения.

Напомним, что при решении уравнения Шредингера обычно используется так называемый метод парциальных волн. Согласно этому методу, для падающей и рассеянной волны производится разложение по парциальным волнам, т.е. по состояниям с определенными значениями переданного орбитального углового момента l . Строго говоря, для рассматриваемой системы в квантовой механике состояние с определенным моментом l не соответствует какому-либо определенному параметру удара. Однако, если проводить параллель с классической механикой, то рассеяние l -го порядка можно связать с частицами, проходящими на расстоянии d_l (параметр удара) от центра сил (см., например, [8]), где

$$d_l = \sqrt{l(l+1)} / \rho, \quad (7.3)$$

а ρ – импульс частицы. (Здесь по-прежнему используется система отсчета, в которой $\hbar=1$).

В таком представлении суперпозиция состояний, отличающихся значением момента импульса (величиной l) как раз и служит формой решения, которое ищется для одного уравнения Шредингера либо для связанной совокупности подобных уравнений (3.9).

Вспомним также, что в нерелятивистских подходах часто допускается целый ряд приближений (например, ограничение только локальным взаимодействием и пренебрежение обменными эффектами), в результате чего в волновой функции общей системы удастся выделить в виде отдельных множителей части, которые зависят только от углов или только от радиусов, а также от спиновых характеристик. При разложении волновой функции относительного движения по парциальным волнам отдельные слагаемые в формулах типа (3.9) соответствуют состояниям с определенными значениями орбитального момента l . В этом случае суммирование по моментам парциальных волн производится одновременно как для радиальной, так и для сферической функции.

В принципе тот же самый формализм разложения применяется и в релятивистском подходе. Отличие последнего заключается по существу лишь в том, что для него характерно, как уже отмечалось, использование так называемого дираковского спинора, состоящего из большого и малого компонентов волновой функции [125]. Только рассматриваемый большой, или верхний компонент, согласно выражению (5.2), можно считать в общем сопоставимым с соответствующей однокомпонентной волновой функцией шредингеровского типа. При этом в дираковской модели структуру, подобную (5.2), приобретают волновые функции, которые характеризуют как связанные состояния, так и континуум [108].

Сейчас нас главным образом интересуют потенциалы протонно-ядерного упругого рассеяния, имеющие релятивистское происхождение, и их основные отличия от традиционных шредингеровских потенциалов. Эквивалентные шредингеровские потенциалы можно считать таковыми, если результаты рассеяния получаются в расчетах фактически одинаковыми как при использовании уравнения Дирака, так и уравнения Шредингера [70]. В связи с этим обсудим применение формализма парциальных волн для релятивистских подходов. В случае рассмотрения сферически симметричного поля, что вполне допустимо при использовании прежде всего ядер с замкнутыми оболочками [126], волновая функция (5.2) может быть разделена на части, зависящие от радиальной координаты, а также от угловых и спиновых переменных [94, 90, 70, 119, 126, 127]. При разложении на парциальные волны релятивистская функция (5.2) принимает форму, которую схематично можно представить следующим образом [94, 90, 70, 127]:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \sum_{lj\mu} \begin{pmatrix} F_{lj}(r) & Y_{lj}^{\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \\ i G_{lj}(r) & Y_{lj}^{\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}. \quad (7.4)$$

Здесь $F_{lj}(r)$ и $G_{lj}(r)$ с указанными индексами, имеющими в принципе тот же смысл, что и в традиционном нерелятивистском подходе, представляют собой радиальные части верхнего и нижнего компонентов волновой функции. Сферические гармоники $Y_{lj}^{\mu}(\hat{\mathbf{r}})$ с дополняющими их соответствующими обозначениями характеризуют роль угловых и спиновых степеней свободы. Они являются функциями, зависящими от угловых ($\hat{\mathbf{r}}$) и спиновых переменных. Их обычно называют спин-угловыми функциями или сферическими функциями со спином.

Указанные в (7.4) спин-угловые функции можно разделить на части исходя из линейных комбинаций спиновых и сферических функций, обладающих по отдельности более простой зависимостью [15, 119, 127]. Разложение релятивистской волновой функции в выражении (7.4) удастся представить при помощи отдельных множителей, включающих радиальные составляющие и обычные сферические функции, а также спиновые волновые функции, при этом последние зависят только от спиновой переменной μ [119, 127].

Разделив волновую функцию на радиальную и угловую части, мы в нерелятивистском подходе обычно получаем радиальное и угловое уравнения [20]. Далее,

используя хорошо разработанный формализм разложения по парциальным волнам, мы практически сводим задачу о рассеянии к решению только радиального уравнения [34, 21].

Дираковскому уравнению (4.2) обычно удовлетворяет волновая функция ψ одночастичного состояния с общей энергией

$$E = \epsilon + m. \quad (7.5)$$

Одночастичная энергия ϵ является отрицательной для связанного состояния и положительной в случае состояния рассеяния [98, 113]. В соответствии с этим, как уже отмечалось, дираковская волновая функция может определять либо связанное состояние, либо континуум. В частности, дираковская волновая функция оболочечной модели представляет собой прямое отражение уникальных релятивистских свойств связанных нуклонов в релятивистских трактовках ядерной структуры. При этом предполагается, что волновые функции как начального, так и конечного связанного состояния удовлетворяют тому же самому дираковскому уравнению [108].

Разложение релятивистской ядерной волновой функции мишени на дираковские одночастичные волновые функции для отдельных орбиталей производится также по схеме, представленной выражением (7.4). Снова можно разделить радиальные и спин-угловые функции $Y_{lj}^{\mu}(\hat{r})$. Только в этом случае квантовые числа l и j характеризуют, соответственно, заполнение одночастичных ядерных подоболочек [90]. Символ σ в (7.4) обозначает обычную спиновую матрицу Паули (4.2a). Радиальные составляющие разложения ядерной волновой функции (7.4) определяют плотностные свойства ядра. Так, ядерные скалярные и векторные плотности, указанные в выражении (4.1), представляют собой комбинации квадратичных зависимостей, образованных из радиальных частей верхнего и нижнего компонентов ядерной волновой функции (см., например, [90]).

Сейчас для нас в первую очередь важно оценить параметры дираковских оптических потенциалов, полученных из подгонки расчетов к экспериментальным данным по упругому рассеянию. В этом контексте обсуждаемые волновые функции ψ (5.2, 7.4), конечно, следует рассматривать как искаженные дираковские спиноры, описывающие относительное движение. Тогда эти функции ψ должны удовлетворять дираковскому уравнению типа (4.2), содержащему комплексные (скалярный и векторный) оптические потенциалы, а также кулоновский потенциал. Как мы уже отмечали, используемые потенциалы могут быть предсказаны исходя из релятивистских NN -амплитуд и ядерных плотностей, либо из подгоночной процедуры в рамках упругого рассеяния. В этом смысле формализм оптического потенциала в своих главных чертах является аналогичным формализму нерелятивистской теории или феноменологии.

Выше мы показали, что дираковское волновое уравнение (4.2) удастся приближенно заменить уравнением, обладающим формой шредингеровского типа (5.3, 6.2). В этом случае мы приходим к так называемым шредингеровским эквивалентным потенциалам. Особенно простым физическим смыслом обладают их вещественные составляющие. Действительно, вещественная составляющая эквивалентного шредингеровского потенциала может быть сопоставимой с соответствующей частью эмпирического потенциала традиционной оптической модели в случае положительных значений энергии ϵ (7.5) или, в свою очередь, должна быть приравнена к эмпирическому потенциалу ядерной оболочечной модели для отрицательных значений ϵ (см., в частности, [128]).

Решение уравнения движения Дирака (4.2) производится с использованием разложения по парциальным волнам (см., например, [78]). Аналогичный метод решения связанных уравнений Шредингера мы также использовали выше и демонстрировали в выражении (3.14). По существу, ничего не должно меняться при решении шредингеровского эквивалентного уравнения (5.3, 6.2). Только здесь мы можем ограничиваться лишь верхним (большим) компонентом дираковского спинора (5.2).

Правда, этот компонент в случае преобразования уравнения Дирака (4.2) в эквивалентное уравнение Шредингера (5.3) испытывает дополнительную редукцию в соответствии с выражением (5.4).

При решении эквивалентного уравнения Шредингера с использованием метода парциальных волн включается только радиальная волновая функция большого компонента $[F(r)]$, представленного в формуле (7.4). Указанная в (5.4) редукция относится и к радиальной составляющей $F(r)$, причем она присутствует в каждой искаженной волне [120]. Радиальная функция с определенным значением орбитального момента l удовлетворяет следующему уравнению шредингеровского типа (см., например, [70, 119, 129]):

$$\left\{ (1/2E) \left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] + V_{eff}(r) - (1+\kappa)V_{so}(r) \right\} B^{-1/2}(r) F_{\kappa}(r) = 0. \quad (7.6)$$

Здесь κ (*капа*, греч.) конкретизирует значение квантовых чисел l и j , указанных в общем выражении (7.4), на чем мы детально остановимся ниже.

Радиальное уравнение Шредингера (7.6) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка, и, следовательно, оно имеет два линейно независимых решения, из которых физический смысл приобретает только то, которое обращается в нуль при $r = 0$ (см., например, [24, 15]). Ясно, что при $r \rightarrow 0$ центробежный член $l(l+1)/r^2$ должен преобладать над энергетическим компонентом k^2 , а при $r \rightarrow \infty$ центробежный член, наоборот, стремится к нулю. Поскольку основные потенциалы V , входящие в уравнение (7.6), являются в достаточной степени короткодействующими, то при $r \rightarrow \infty$ радиальная функция ведет себя как решение радиального уравнения для свободного движения [24].

В выражении (7.6) мы используем главным образом обозначения, предложенные в работе [119]. В соответствии с этим

$$B(r) = 1 + \frac{V_s - V_v}{E + m}, \quad (7.7)$$

где $V_s(r)$ и V_v – скалярный и векторный потенциалы, соответственно. Из сравнения (7.7) с формулой (6.10) видно, что $B(r)$ совпадает с той частью выражения (6.10), что указана в квадратных скобках. Кроме того, $B(r)$ отличается от величины $A(r)$, представленной формулой (6.9), лишь включением в $A(r)$ дополнительного вклада, связанного с кулоновскими силами. Совершенно очевидно, что для больших значений r величина $B(r) \rightarrow 1$, при этом уравнение (7.6) с точки зрения своей структуры фактически становится тем же самым, что и традиционное радиальное уравнение Шредингера.

ЛЕКЦИЯ 8

Специфические особенности рассматриваемых уравнений

Несмотря на многие сходные черты традиционного уравнения Шредингера и эквивалентного уравнения Шредингера, преобразованного из уравнения Дирака, следует выделить также и отличительные особенности каждого из этих двух типов уравнений. Так, во втором случае эквивалентного уравнения проявляется в том или ином виде специфическая особенность исходной релятивистской модели, где общая энергия рассматривается как сумма кинетической энергии и нуклонной массы или, точнее,

некоторой эффективной массы. Конечно, следует подчеркнуть, что многие выражения приведены выше лишь в упрощенной или схематической форме. Например, в полурелятивистском уравнении движения (5.1), следуя работе [90], мы пренебрегали оператором кинетической энергии мишени и, следовательно, эффектами отдачи ядра, а также связанной с этим коррекцией. Кроме того, уравнение Дирака в представлении (4.2) в принципе действительно только для мишени с бесконечной массой. Поэтому во многих работах, в частности в [90, 64], эффективно учитывается то, что масса ядра не совсем деле конечна. Но особенно большое число работ освещает тот факт, что сильное векторное и скалярное поля существенно модифицируют вещественную массу нуклона m , превращая ее в некоторую качественно другую – так называемую остаточную [70, 90, 123] или даже вообще в комплексную массу [130].

Согласно представлениям релятивистской модели, именно сильный скалярный потенциал S эффективно производит перенормировку массы нуклона в ядерной среде m^* относительно массы свободного нуклона m . В результате большое скалярное поле сдвигает массу нуклона, меняя его величину m на значение m^* следующим образом [131, 132]:

$$m^* = m + S. \quad (8.1)$$

При этом комплексный дираковский скалярный потенциал S (6.3) может, в принципе, привести не только к вещественной, но также и к комплексной эффективной массе m^* [130].

Вещественная часть скалярного потенциала S_R (6.3) в различных релятивистских моделях для широкого диапазона E_p ($E_p = 200\text{--}1000$ МэВ) представляется притягивающей, т.е. принимающей отрицательные значения, в то время как мнимая часть этого потенциала S_I (6.3), наоборот, характеризуется положительными величинами [130, 104]. Соотношение модулей S_R и S_I зависит от энергии E_p , но в основном наблюдается превосходящая роль S_R . Основной результат релятивистской динамики сводится к существенному уменьшению эффективной массы (обычно на 20–40%) по сравнению с ее свободным значением [104, 123].

Взаимодействие спинового и орбитального моментов количества движения частицы приводит, как известно, к наличию в сконструированном гамильтониане члена взаимодействия, содержащего произведение двух соответствующих векторов. Это относится и к традиционному уравнению Шредингера, что находит отражение в соответствующем потенциале, и распространяется на так называемое эквивалентное уравнение Шредингера (5.3, 6.2), произведенное от уравнения Дирака. Что касается того или иного радиального уравнения Шредингера с разложением по парциальным волнам, то используемые в нем спин-орбитальные силы, разумеется, также зависят от величины орбитального момента парциальной волны, правда, выбор потенциалов при этом не является однозначным [3].

Следуя работе [3], отметим, что спин налетающей частицы (протона) можно соединить, как хорошо известно, двумя способами с орбитальным угловым моментом l для того, чтобы образовать полный угловой момент j : $j = l + \frac{1}{2}$ и $j = l - \frac{1}{2}$. При этом собственные значения оператора $\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, соответствующие этим двум ориентациям спина, являются следующими: $\kappa = - (l + 1)$ и $\kappa = l$. Эти обозначения κ (капа) иногда называемые дираковскими и используемые, в частности, в работах [119, 129], применяются также и в уравнении (7.6).

Последнее уравнение требует, как обычно, дальнейшей детализации, которую можно произвести, следуя, например, работе [119]. В этом случае указанный в (7.6) эффективный потенциал характеризуется формулой:

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2E} \left\{ (V_s + V_v)(V_s - V_v + E + m) + (-E + m) + (V_s - V_v)(-E + m) + \left[-\frac{1}{r} \frac{B'}{B} - \frac{1}{2} \frac{B''}{B} + \frac{3}{4} \left(\frac{B'}{B} \right)^2 \right] \right\}, \quad (8.2)$$

где величины B' и B'' представляют в сокращенном виде, соответственно, первую и вторую радиальные производные от функции $B(r)$, которая приведена выше (7.7). При этом в выражении (7.7), как уже отмечалось, пренебрегается вкладом составляющей, обусловленной кулоновскими силами. В результате такого упрощения в формуле (8.2) для $V_{eff}(r)$ исчезает квадратичная зависимость, связанная с кулоновской частью. Подобные приближения, согласно [119], усиливают сходство структур уравнения (8.2) и традиционного радиального уравнения Шредингера.

Указанный в формуле (7.6) также в предыдущей лекции спин-орбитальный потенциал $V_{s.o.}(r)$, согласно [119], может быть детализирован следующим образом:

$$V_{s.o.}(r) = -\frac{1}{2Er} \frac{B'}{B}, \quad (8.3)$$

где обозначения имеют тот же самый смысл, что и в (8.2). Сравнение выражений (8.3) и (6.12) ясно показывает их почти идентичность по форме. Различие этих выражений состоит только в том, что в первом случае используется функция $B(r)$ (7.7), а во втором – $A(r)$ (6.9). При этом, как уже отмечалось, выражение B является не чем иным, как упрощенной функцией A (в B просто опущен отталкивающий кулоновский компонент V_C).

Эффективный потенциал, представленный в виде (8.2), оказался очень удобным (с точки зрения своей формы) для практического применения. Кроме того, эта форма записи $V_{eff}(r)$ с учетом выражения (7.7) для $B(r)$ особенно наглядно раскрывает неразрывную связь всех составляющих указанного в (7.6) оптического потенциала – как центральных, так и нецентральных (8.2, 8.3). Подобная прямая связь по существу является отражением общего внутреннего свойства дираковской модели, которое заключается в наличии в ней сильной корреляции между параметрами индивидуальных потенциалов [78, 109, 111, 112, 119, 122, 133].

В выражениях (7.7, 8.2, 8.3), взятых из работы [119], прежде всего обращает на себя внимание включение суммы потенциалов ($V_s + V_v$) и их разности ($V_s - V_v$) в различные комбинации и функциональные зависимости. Поскольку доминирующая вещественная часть силы является притягивающей в V_s и отталкивающей в V_v , то разность ($V_s - V_v$) приводит к эффективному усилению соответствующих потенциалов. Это особенно проявляется в спин-орбитальном потенциале и в дарвиновском потенциале. Более детально с этими вопросами можно ознакомиться в [73, 98, 123, 134].

Как ясно из многих изложенных выше заключений, располагая выражениями для эффективного (центрального) и спин-орбитального потенциалов в виде (8.2, 8.3) или (6.5, 6.11, 6.12), мы имеем практическую возможность использовать по существу одни и те же потенциалы дираковской модели как в релятивистском, так и в нерелятивистском подходах (см., в частности, [109, 115]).

Форма записи (8.2) для $V_{eff}(r)$ особенно рациональна с точки зрения демонстрации глобальных потенциалов дираковской феноменологии, полученных на основе процедуры подгонки аналитических результатов к экспериментальным данным по упругому рассеянию протонов для широкого диапазона энергий E_p и массовых чисел мишени A [109, 111, 133].

Прежде чем детально остановиться на свойствах феноменологических глобальных потенциалов релятивистского происхождения, рассмотрим некоторые черты традиционной нерелятивистской оптической модели. Так, согласно обобщениям [3], нерелятивистские

оптические потенциалы с оптимально выбранными значениями параметров в целом позволяют достаточно успешно описывать экспериментальные дифференциальные сечения по упругому рассеянию многих частиц. Соответствующие параметры оптических потенциалов представляют собой прежде всего плавные и медленно меняющиеся функции как энергий налетающих частиц, так и атомного веса мишеней. Именно благодаря этим качествам традиционные оптические потенциалы оказываются приемлемыми для общего описания большого количества экспериментальных данных [3].

Если вновь вернуться к оптическим потенциалам релятивистского происхождения, то оказывается, что их глобальная подгонка на основе экспериментальных данных по упругому рассеянию протонов в достаточно широком диапазоне энергий (в частности, 20–200 МэВ) не позволяет достигнуть плавной энергетической зависимости значений отдельных потенциалов (см. [133]). Однако здесь же, как и в других работах (например, [109, 111, 112]), установлено, что требуемую плавную энергетическую зависимость можно получить, если произвести подобную параметризацию сразу для некоторой определенной комбинации указанных потенциалов. Например, в [133] выясняется, что использование даже такой простой комбинации параметров, как отношение векторной и скалярной вещественной силы потенциалов, улучшает качество проведения указанной подгоночной процедуры.

В этом плане интересные наблюдения с точки зрения целесообразности сочетания сил дираковских потенциалов получены в работах [109, 133]. Согласно этим наблюдениям, наиболее существенными для подгонки расчетов к данным по упругому рассеянию являются прежде всего следующие комбинации потенциалов (в порядке уменьшения важности):

$$\begin{aligned} V_V + V_S, \quad W_V + W_S, \\ V_V - V_S, \quad W_V - W_S, \end{aligned} \quad (8.4)$$

Здесь величины V_i представляют вещественные, а W_i – мнимые компоненты векторного и скалярного оптических потенциалов, соответственно (индекс i просто заменяет обозначения V и S). Структура каждого из этих потенциалов, включающих обе указанные составляющие, была представлена в выражениях (6.3, 6.4). Заметим, что во многих формулах мы сохраняем обозначения, применяемые в тех или иных оригинальных работах, что, на наш взгляд, облегчает обращение к первоисточникам. В соответствии с этим кажется не лишним подчеркнуть идентичность следующих символов, используемых в выражениях (6.3, 6.4) и (8.4):

$$\begin{aligned} S_R \equiv V_S \quad S_I \equiv W_S \\ V_R \equiv V_V \quad V_I \equiv W_V. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Итак, приведенные выше комбинации параметров оптической модели, представляющие собой суммы и разности соответствующих вещественных и мнимых компонентов дираковских потенциалов, являются более рациональными в подгоночной процедуре для упругого рассеяния, чем если бы все эти компоненты использовались не в указанных сочетаниях, а по отдельности. Но именно из такого рода комбинаций дираковских потенциалов или радиальных производных от подобных комбинаций по существу и состоят все основные элементы эквивалентного шредингеровского потенциала в (7.7, 8.2, 8.3). Если ограничиться обозначениями (8.5, левые части), то в выражения (7.7) и (8.2) окажутся включенными как бы только вещественные составляющие потенциалов, однако на самом деле это комплексные величины, как в случаях (6.3, 6.4) или (8.4).

Из произведения $(V_S + V_V)(V_S - V_V + E + m)$ в формуле (8.2) становится очевидным появление квадратных членов в эквивалентном шредингеровском потенциале. В

частности, не вызывает сомнения то, что из настоящего произведения как раз и возникает составляющая потенциала, имеющая квадратичную зависимость, представленную в выражении (7.2).

Для описания рассеяния протонов на ядрах при промежуточных энергиях компоненты дираковского оптического потенциала (скалярные, векторные и другие) должны быть комплексными величинами [73, 78, 80, 81, 109, 111, 114, 135]. Такие свойства членов потенциалов в принципе продемонстрированы в выражениях (6.3, 6.4). Однако последние носят довольно формальный характер и не свидетельствуют о каком-либо распределении соответствующих сил в пространстве. В простейшем представлении допускается [73], что вещественные и мнимые части каждого компонента потенциала имеют одинаковую геометрию. Кроме того, в исследовании [73] использовано приближение, согласно которому формфакторы скалярной и векторной силы являются идентичными. Но в более сложном подходе [80] уже все соответствующие формфакторы дифференцированы, как это и продемонстрировано в выражениях (4.3, 4.4).

Комплексный характер скалярной и векторной составляющей оптического потенциала и наличие квадратичной зависимости этих составляющих неизбежно приводят к смешиванию вещественных и мнимых частей оптического потенциала [78, 123].

В феноменологическом подходе уравнение Дирака (4.2) решается, как известно, с использованием усредненных потенциалов путем подгонки тех или иных расчетных характеристик к соответствующим экспериментальным данным. В одночастичном приближении потенциал взаимодействия, который испытывает налетающий нуклон, характеризуется как комбинация скалярного поля (βU_s) и четвертого компонента (U_v) векторного поля. Если учесть также и обменные процессы, то, по крайней мере с теоретической точки зрения, можно легко объяснить существование целого набора эквивалентных значений релятивистских полей [128]. Различное описание таких полей связано, в частности, с тем, что в гамильтониан включена четырехрядная матрица Дирака β (4 x 4). Для того чтобы ее ясно себе представить, дополним три двумерные матрицы Паули, включенные в выражение (4.2а) – в круглых скобках, еще двумя следующими матрицами:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Вторая из этих двух матриц – не что иное, как нулевая матрица, а первая из них обычно называется двумерной единичной матрицей (2x2). Наиболее часто используется также представление, в котором матрица Дирака β выражается через единичную матрицу $\mathbf{I}$ следующим образом (см. [15, 23, 135, 136]):

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Если в (8.7) подставить вместо $\mathbf{I}$ полное значение этой величины, данное в (8.6), то мы получим матрицу β в явном виде. Она будет состоять из четырех строк и четырех столбцов. Такая матрица обычно имеет обозначение 4x4. Для простоты обозначений матрицу β нередко представляют в следующем виде [20, 125]:

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (8.8)$$

Используемую здесь единицу только надо трактовать как «элемент» матрицы β , который в свою очередь также на самом деле является матрицей с двумя строками и столбцами. Таким

образом, в этом случае единица обозначает не что иное как единичную матрицу 2×2 , уже указанную в (8.6). Чтобы не путать две формы записи матрицы β , в случае представления (8.8) используются квадратные скобки (согласно работе [125]), в отличие от записи (8.7) с круглыми скобками. Правда, на практике указанными графическими различиями часто пренебрегается, хотя соответствующее смысловое содержание при этом учитывается строго (см., например, [20]).

Как известно, квантовая форма теории Юкавы трактует ядерные силы в терминах обмена мезонами между нуклонами. При этом мезон может быть скалярным или векторным. В таком представлении (см. [98]) волновая функция $\psi \equiv \psi^D$ (5.2) для состояния одночастичного рассеяния с общей энергией E (7.5) удовлетворяет уравнению Дирака (4.2). В этом случае средний нуклон-ядерный потенциал

$$U_{\text{средн}} = \beta U_s + U_v \quad (8.9)$$

является суммой двух членов (скаляра – первый член и четвертого компонента вектора – второй член). Каждый из этих членов может быть представлен в виде свертки (4.5), построенной на соответствующей скалярной и векторной (барионной) плотности, рассматриваемой в выражениях (4.1) и (5.6). В релятивистском приближении Хартри опускаются члены Фока, которые возникают от антисимметризации [98]. Кроме того, в приближении Хартри средний потенциал $U_{\text{средн}}$ (8.9) трактуется как вещественный, локальный и независимый от энергии [98].

Если отказаться от предлагаемых здесь упрощений и сосредоточиться на поисках феноменологических потенциалов, то выясняется, что мнимые части потенциалов $U_s(S_I)$ и $U_v(V_I)$ не удастся определить достаточно хорошо, особенно если поиск вести для каждого из потенциалов по отдельности [123]. Однако если исследовать поля в целом, то ситуация становится более определенной. Так, полная мнимая часть эквивалентного шредингеровского потенциала может оцениваться, в частности, следующим образом [123]:

$$U_I \approx S_I + \frac{E}{m_N} V_I + \frac{S_R S_I}{m_N} - \frac{V_R V_I}{m_N} \quad (8.10)$$

где $E = T_p + m_p$ – общая энергия налетающего протона в лабораторной системе, а m_N – эффективная масса нуклонов ядре.

Появление составляющих $S_R S_I$ и $V_R V_I$ (8.10), а также квадратичных членов (7.2) оптического потенциала в уравнении Шредингера обеспечивается естественным образом только за счет релятивистских конструкций. Именно нелинейные зависимости, отсутствовавшие в традиционной (шредингеровской) оптической модели, возникают в «эквивалентной» модели за счет применения дираковского формализма (см., в частности, [47, 117, 123]).

ЛЕКЦИЯ 9

Сопоставление аналитических подходов в релятивистском представлении упругого рассеяния протонов Матрицы в релятивистском формализме

Волновое уравнение Дирака (4.2) является линейным относительно импульса, поскольку в этом уравнении $\mathbf{p}$ представляет как раз обычный оператор импульса. Если в выражении (4.2) пренебречь всеми силовыми полями, то гамильтониан существенно

сокращается, и мы получаем волновое уравнение для свободной частицы в следующей форме:

$$[\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m] \psi = E\psi. \quad (9.1)$$

Иногда используется для настоящего гамильтониана также и противоположный знак, но тогда изменяется значение отдельных компонентов волновой функции ψ , удовлетворяющей данному уравнению (см. [23]).

Как видно, в (9.1) входят дираковские матрицы α и β , т.е. спинорные функции в матричном представлении. Таким образом, характерной особенностью релятивистского волнового уравнения является то обстоятельство, что здесь в теоретические формулировки спин частицы вводится с самого начала, а не добавляется впоследствии согласно принципу Паули, как это делается в рамках нерелятивистской теории Шредингера (см. [20]).

Из уравнения (9.1) видно, что простейший дираковский гамильтониан оказывается линейным не только относительно импульса, но и массы. Если отказаться от часто применяемой, как в формулах (4.2) и (9.1), системы единиц, в которой $\hbar = c = 1$, то уравнение (9.1) приобретает вид несколько громоздкий, но зато более ясный с физической точки зрения. Действительно, тогда (см., в частности, [15, 23, 20, 42])

$$[c\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2] \psi = E\psi, \quad (9.2)$$

где m – масса покоящейся частицы, а c – скорость света. Здесь в явном виде отражено обобщающее положение о том, что согласно теории относительности в энергию свободной частицы E следует включать и энергию покоя mc^2 . Сомножитель $c\alpha$ первого члена в уравнении (9.2) является оператором скорости. А все выражение в квадратных скобках характеризует оператор релятивистской кинетической энергии [15].

Используемая в уравнениях (9.1) и (9.2) матрица β приведена в лекции 8 – формула (8.8). В том же самом формате матрицу α (9.2) можно выразить при помощи набора трех известных спинорных матриц Паули σ , имеющих вид 2×2 . Эти матрицы указаны как σ_x , σ_y и σ_z в выражении (4.2а). Часто также используются обозначения этих матриц как σ_i , где i равно 1, 2, 3. Во всяком случае матрица α состоит из трех элементов (компонентов), включенных в выражение (4.2а) в явном виде – в круглых скобках. В лаконичной форме, использованной для матрицы β (8.8), можно записать и матрицу α . Тогда она приобретет следующий вид:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}, \quad (9.3)$$

где, как и в случае (8.8), каждый элемент характеризует собой матрицу с двумя строками и столбцами (см. [20, 23]).

Итак, в кратком изложении четырехрядные матрицы α и β в уравнении Дирака обычно выражаются через двухрядные матрицы. В случае α (9.3) элемент σ представляет три спинорные матрицы Паули (2×2), а в случае β (8.7) элемент I – не что иное, как двумерная единичная матрица (8.6). Возможны также и некоторые другие выборы матриц α и β , с чем можно познакомиться в монографиях [15, 20, 23].

Запишем уравнение (9.2) в краткой форме, обозначив, как часто принято, весь оператор энергии одним символом, например, H^0 . Тогда выражение (9.2) приобретет традиционный простой вид:

$$H^0 \psi = E\psi. \quad (9.4)$$

Верхний индекс в операторе энергии H^0 в нашем случае указывает на отсутствие действия какого-либо внешнего поля. С формальной точки зрения уравнение (9.4) имеет почти тот же самый вид, что и приведенное выше в сокращенной форме стационарное уравнение Шредингера (1.2). Правда, в случае (1.2) гамильтониан системы является, вообще говоря, более полным, поскольку включает не только оператор кинетической, но также и потенциальной энергии, что выражено в отсутствии какого-либо индекса в общем операторе энергии (H).

Уравнения типа (1.2) или (9.4) принадлежат к тому классу уравнений, в которых в качестве H (или H^0) используются операторы энергии, называемые обычно гамильтонианами. Хорошо известно, что нередко действие данного оператора на некоторую функцию может привести просто к умножению этой функции на определенную константу (правые части уравнений). Эту константу (E) обычно называют собственным значением такого оператора. В случае применения оператора энергии H (H^0) можно получить собственные значения этого оператора в уравнениях Шредингера или Дирака. Не делая различия между выражениями (1.2, 1.3), с одной стороны, и выражением (9.2) – с другой, мы по существу унифицируем задачу. Ее обычно называют задачей на собственные значения оператора энергии.

При дальнейшем обобщении подобная идея может быть сформулирована на основе следующего уравнения:

$$M \nu = \lambda \nu \quad (9.5)$$

где мы используем математические обозначения и их трактовку, принятые в книге [137]. Здесь M уже рассматривается, по существу, как произвольный оператор, который может быть матрицей, а также дифференциальным оператором или интегральным оператором и т.д. При этом ν – определенный объект в зависимости от вида M . Если M является матрицей, то ν – вектор-столбец. Если же M оказывается дифференциальным оператором, то ν – функция и т.д. Получаемые решения ν уравнения (9.5) принято называть собственными векторами, собственными функциями и т.д. Значения параметра λ (константы), для которого существуют нетривиальные решения ν уравнения (9.5), называются собственными значениями.

Выше мы показывали, например, в выражениях (1.3, 1.21–1.24, 3.2), что в нерелятивистской теории энергия взаимодействия зависит только от координат, а кинетическая энергия является простой функцией импульса ($p^2/2m$). В результате этого мы получали уравнение Шредингера в виде достаточно простого дифференциального уравнения второго порядка. Порядок дифференциального уравнения, как хорошо известно в математике (см., в частности, [137]), определяется производной высшего порядка после того, как уравнение рационализировано.

Если в релятивистском движении заметно ограничить волновую функцию, выделив только ее самую существенную часть, то уравнение Дирака можно свести к линейному уравнению второго порядка, а именно к уравнению шредингеровского типа. Этот результат продемонстрирован в выражениях (5.3, 6.2, 7.6).

Однако если в релятивистской теории больше не допускать грубых приближений, то, конечно, следует использовать другие представления. В этих случаях широкое применение получил матричный способ записи операторов. Он особенно удобен и потому, что в теоретических рассуждениях приводит к хорошо известному единообразию формулировок. Последнее заключается в том, что все возможные представления операторов и волновых функций оказываются совершенно равноправными (например, [8]). Методы матричной алгебры описаны, в частности, в монографиях [8, 15, 20, 21, 42, 137]. Там же подтверждается тот факт, что матрицы Дирака, а именно β (8.7) и α (9.3), должны быть по крайней мере четвертого порядка. Это касается и всех трех компонентов матрицы α , обозначаемых как $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ или как α_i , где индекс i приобретает значения от 1 до 3.

В упомянутых выше монографиях устанавливаются также и основные свойства волновых функций ψ уравнения Дирака (9.1) и (9.2). Исходя из того факта, что спинорные матрицы α и β оказываются четырехрядными, предполагается, что и волновая функция ψ , вообще говоря, может содержать четыре компонента. В итоге определяется ее структура. В целом волновая функция ψ может быть матрицей с четырьмя строками и одним столбцом. Ранее в выражениях (1.11–1.14) мы демонстрировали, что и в случае уравнения Шредингера можно представить два компонента волновых функций и что эти компоненты связаны с двумя состояниями спина. В дальнейшем мы увидим, что и четыре компонента релятивистской волновой функции ψ также имеют определенный физический смысл.

Из соответствия двух уравнений – уравнения Дирака и релятивистского уравнения Шредингера, в котором используется релятивистское выражение для энергии, довольно легко устанавливаются и другие сведения о матрицах α и β . В частности, выясняется, что квадраты каждого из трех компонентов матрицы α не только равны между собой, но и равны единице. Подобное ограничение накладывается также и на матрицу β . Оказывается, что

$$\beta^2 = 1. \quad (9.6)$$

Это простое равенство, как увидим из дальнейшего, очень важно.

Наряду с матрицами β (8.7, 9.6), α и σ (9.3) в релятивистском формализме широко используется несколько различных представлений так называемых γ -матриц, о чем можно детально ознакомиться в указанных выше монографиях. Для ближайшего рассмотрения ограничимся пока одним из наиболее наглядных представлений γ -матриц, данных в классических работах [125, 136], а именно:

$$\gamma = \beta\alpha \quad \gamma^0 \equiv \gamma_0 = \beta. \quad (9.7)$$

Согласно [119], γ_0 можно трактовать как нулевой компонент дираковских гамма-матриц. В целом же очевидно, что вообще гамма-матрицы выражаются через матрицы α и β и также служат 4×4 -обобщением операторов спина. Они по-прежнему определяются в терминах спинорных матриц Паули σ , имеющих вид 2×2 . Если исходить из представления авторов работ [94, 126], то

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.8)$$

В случае применения сферической системы координат радиальная дираковская γ^r -матрица (символ r) может быть определена (см. [94, 101]) как

$$\gamma^r = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_r \\ -\sigma_r & 0 \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

Если иметь в виду, что гамма-матрицы являются в действительности четырехрядными и, следовательно, согласно работам [125, 136], должны обозначаться квадратными скобками, как в выражениях (8.8, 9.3), то и в случаях (9.8, 9.9), строго говоря, тоже надо было бы применить квадратные скобки вместо круглых. Однако, как уже выше отмечалось, на практике подобными различиями в написании пренебрегается [93, 91, 126].

Основная физическая суть перехода к релятивистскому квантовому уравнению сводится к явному учету дополнительных степеней свободы по отношению к нерелятивистскому уравнению (см. [15]). Помимо обычных степеней свободы, связанных с пространственным перемещением частицы, дополнительные степени свободы

соответствуют дискретным переменным – таким, как допустимые проекции спина частицы и возможные значения ее заряда. Требования описания с учетом дискретных переменных по существу и привело к матричному представлению, как наиболее рациональному.

Введем релятивистский нуклон-ядерный потенциал, учитывая соотношения (9.6–9.7). Воспользуемся для этого теоретическим представлением среднего самосогласованного нуклон-ядерного потенциала в приближении Хартри–Фока (см., например, [15, 20]) и распространением подобного представления на релятивистское поле [101, 128]. В этом случае будем обозначать средний потенциал Хартри–Фока символом U^{HF} . Дополнением этого потенциала с учетом выражений (7.5, 9.6) и (9.7) уравнение типа (9.1) преобразится, главным образом расширится. Согласно работе [101], уравнение Дирака, включающее потенциал Хартри–Фока и удовлетворяющее однонуклонной волновой функции $\phi(r; \epsilon)$, записывается в следующем виде:

$$\left[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \gamma^0 [m + U^{HF}(r)] \right] \phi(r; \epsilon) = (\epsilon + m) \phi(r; \epsilon). \quad (9.10)$$

Здесь средний потенциал

$$U^{HF}(r) = U_s^{HF}(r) + \gamma^0 U_0^{HF}(r) + \text{другие члены}, \quad (9.11)$$

где нижние индексы s и 0 указывают на тот же самый физический смысл, что и в формулах (4.2, 4.3) и (4.4). В выражении (9.11) составляющая «другие члены» представляет по существу второстепенные компоненты релятивистского поля. При этом каждый из двух включенных туда компонентов содержит в качестве сомножителя приведенную в выражении (9.9) матрицу γ^r (см. [101]). Согласно последней работе, оба явно невыраженные компонента являются по сравнению с U_s^{HF} и U_0^{HF} меньшими на порядок величины и практически не влияют на процесс упругого рассеяния. Следовательно, при рассмотрении этого процесса вкладом «другие члены» в выражении (9.11) можно пренебречь.

Форма релятивистского уравнения (9.10) и его потенциала (9.11) сохраняется аналогичной и в подходе, представляющем дираковскую феноменологию (см., например, [92]). При этом в выражениях типа (9.10) по-прежнему можно выделить кинетическую и потенциальную энергию [98, 128]. Однако теперь надо иметь в виду, что во всех рассматриваемых случаях в уравнениях движения включается релятивистский, т.е. матричный потенциал. Релятивистские аспекты таких потенциалов с различными типами приближений детально рассматриваются, например, в работах [116, 128]. Кратко можно сказать, что теперь для протон-ядерного рассеяния эффективный потенциал представляется в виде матрицы 4×4 в пространстве дираковского спинора для взаимодействующей частицы. Детали такого положения будут проясняться из последующего освещения материала.

ЛЕКЦИЯ 10

Деформационная модель в методе искаженных волн, основанном на релятивистском и нерелятивистском формализмах

Если ограничиться релятивистской феноменологией, то дираковский потенциал U_D типа (9.11), включающий также и кулоновскую составляющую V_C , можно выразить следующим образом [96]:

$$U_D(r) = U_S(r) + \gamma^0 [U_0(r) + V_C(r)]. \quad (10.1)$$

По крайней мере в случае достаточной симметрии, т.е. для четно-четных ядер с $N = Z$, допустимо рассмотрение U_D в качестве оптического потенциала, который позволяет описать рассеяние нуклона [96].

Возможность описания неупругого рассеяния частиц, в том числе и протонов, в рамках МИВ с применением традиционного или нерелятивистского формализма обычно распространяют также на релятивистские представления. Подобно традиционному подходу вводится так называемый расширенный оптический потенциал Дирака [96, 138]. В этом случае, во-первых, искаженные волны типа (1.1, 9.1), описывающие относительное нуклон-ядерное рассеяние, устанавливаются в результате решения уравнения Дирака, подобного (4.2, 9.10), со скалярным и лоренцовым векторным потенциалами. Каждый из них является комплексным (4.3, 4.4) и в целом составляет оптический потенциал Дирака (10.1). Во-вторых, переходной оператор неупругого процесса, определенный в традиционном нерелятивистском подходе, в релятивистской модели также получается путем деформации, но теперь уже скалярного и векторного потенциалов [138].

Вспомним, что в традиционной макроскопической трактовке переходной потенциал (типа ΔU) конструируется на основе деформированного полного оптического потенциала, а затем в том же виде входит в амплитуду неупругого перехода (см., например, [1]). В релятивистском подходе, преследуя аналогичные цели, т.е. ориентируясь на коллективноподобные движения в ядре, мы также допускаем возможность рассматривать деформацию оптического потенциала Дирака (10.1), т.е. ΔU_D . Тогда, исходя из аналогии с нерелятивистским (часто называемым стандартным) подходом в МИВ, мы в дираковском формализме будем использовать оператор ΔU_D [96, 138].

С целью получения более ясной картины при сравнении двух рассматриваемых коллективноподобных подходов по МИВ (стандартного и дираковского) мы ограничимся пока так называемыми промежуточными энергиями протонов E_p . Тогда, как показывает опыт, начиная с $E_p = 150$ МэВ, а также для более высоких значений E_p , вполне допустимы некоторые упрощения. Во-первых, можно пренебречь деформацией кулоновской части оптического потенциала. Эта его часть обозначена символом $V_C(r)$ как в случае стандартного (шредингеровского), так и дираковского (10.1) представления полного оптического потенциала. Итак, в операторе неупругого перехода ΔU его кулоновской частью (ΔU_C) мы пренебрегаем. Кроме того, в случае рассматриваемых сейчас промежуточных значений E_p мнимая составляющая центрального компонента оптического потенциала обычно характеризуется только объемной формой (объемный тип поглощения), в то время как роль поверхностной формы той же мнимой составляющей оказывается пренебрежимо малой. Этот факт установлен во многих работах на основе анализа по оптической модели экспериментальных данных по упругому рассеянию протонов соответствующих энергий.

Высказанные выше качественные соображения могут быть легко формализованы, например, в виде, данном в работе [138]. Так, матрица неупругого рассеяния протонов на четно-четном ядре для возбуждения состояния нормальной четности $|JM\rangle$ из основного

состояния $|00\rangle$ представляется следующим образом в первом приближении МИВ в случае использования релятивистской коллективной модели:

$$T(\mu_i; \mu_f; M) = \int \bar{\psi}_{\mu_f}(r) \langle JM | \Delta U | 00 \rangle \psi_{\mu_i}(r) dr. \quad (10.2)$$

Здесь μ_i и μ_f – проекции спина протона соответственно в начальном и конечном состояниях.

Одним из существенных отличий данного коллективного релятивистского подхода в МИВ от всех аналогичных вариантов нерелятивистских формулировок коллективного типа (см., например, [1]) является следующее. Теперь в (10.2) волновые функции ψ представляют уже искаженные дираковские спиноры, описывающие относительное движение. Они должны удовлетворять уравнению Дирака (4.2). Последнее содержит потенциалы, которые, как уже отмечалось, можно по-прежнему в целом трактовать как оптический потенциал. Тогда оператор ΔU в (10.2), вообще говоря, можно получить путем деформации представленных в (4.2) скалярного (U_s) и векторного ($U_v \equiv U_0$) потенциалов тем же самым способом, что и в случае нерелятивистского подхода по МИВ. В последнем случае производилась деформация полного оптического потенциала, состоящего из различных частей.

Спецификой релятивистского оптического потенциала является и то, что он состоит из других частей по сравнению с нерелятивистским. Если, согласно [96], дираковский оптический потенциал взять в форме (10.1) и пренебречь деформацией кулоновского потенциала, то мы получим, как и в работе [138], переходной матричный элемент, входящий в (10.2), в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle JM | \Delta U | 00 \rangle &= \langle JM | \Delta U_s + \gamma^0 \Delta U_0 | 00 \rangle = \\ &= [C_s(J)F_s(r) + \gamma^0 C_0(J)F_0(r)] Y_J^{*M}(\hat{r}). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Здесь $C_{s,0}$ – постоянные коэффициенты, которые определяются параметрами деформации, а $F_{s,0}$ – комплексные радиальные формфакторы, пропорциональные радиальным производным от потенциалов.

Как мы уже отмечали, подобно нерелятивистскому подходу, в качестве первого шага параметры оптического потенциала Дирака устанавливаются в результате их подгонки к данным по упругому рассеянию. Кроме того, по существу, так же как в традиционном шредингеровском варианте, вполне развит и альтернативный подход, основанный на релятивистском импульсном приближении. Естественно, что тогда оптические потенциалы, генерирующие искаженные волны, базируются на указанном импульсном приближении. А соответствующие операторы неупругих переходов получаются в результате фолдинг-процедуры, включающей деформированные векторную и скалярную плотности.

Начнем детальное рассмотрение решения уравнения Дирака с наиболее простого подхода, которым, по нашему мнению, является эмпирическим. В этом случае дираковское уравнение типа (4.2) решается численно, а параметры потенциалов находятся из процедуры подгонки к экспериментальным данным по упругому рассеянию. Конечно, в этом случае надо сделать предположения относительно функциональных зависимостей вещественных и мнимых частей потенциалов U_s и U_0 . Часто полагают, что они определяются функциями типа Вудса–Саксона $f(r, R, a)$, как это сделано, например, в работе [96], которую мы сейчас и возьмем за основу для дальнейшего изложения.

Такой подход к решению дираковского уравнения оказывается вполне успешным и в действительности воспроизводит вполне последовательную картину процесса рассеяния при промежуточных энергиях. Для этого обычно используется компьютерный код поиска

потенциалов дираковского уравнения, специально предназначенный для подгонки в первом приближении к данным по упругому рассеянию. Подобная процедура позволяет определить комплексные скалярный и векторный потенциалы U_s и U_0 . А уже затем из последних находятся так называемые оптические потенциалы типа U_{DEB} (*DEB*: Dirac–equation–based), т.е. основанные на уравнении Дирака [96]. В предыдущих разделах сходные потенциалы назывались потенциалами шредингеровского типа. Они отвечали уравнению Дирака, используемому для анализа упругого рассеяния, когда при промежуточных энергиях частиц такое уравнение может быть сокращено до уравнения шредингеровского «эквивалента» за счет включения только верхнего компонента полной дираковской волновой функции.

Полученные таким образом потенциалы шредингеровского типа или, в формулировке [96], U_{DEB} использовались затем в коде для традиционного уравнения Шредингера. В результате производился повторный перерасчет для наблюдаемых величин по упругому рассеянию. Оказалось, что для легких ядер (включающих ^{40}Ca) результаты расчетов традиционного шредингеровского типа повторяли с достаточно высокой точностью те вычисления, которые получались при использовании кода, построенного на уравнении Дирака [96]. И лишь в случае тяжелого ядра ^{208}Pb расчетные результаты двух типов слегка расходились, что связывалось с различной трактовкой кулоновских эффектов в двух используемых подходах [96].

Если опустить относительно малый дарвиновский член, то потенциал дираковского происхождения («эквивалентный» шредингеровскому) можно схематически разложить на две части: центральную и спин-орбитальную и, следовательно, представить в таком упрощенном виде [96]:

$$U_{DEB}(r) = U_c(r) + U_{s.o.}(r) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}. \quad (10.4)$$

Формализм физики рассеяния строится так, что по существу все потенциалы (релятивистские или нерелятивистские) представляются абсорбтивными, как схематически показано в выражениях (6.3, 6.4). Рассматриваемый сейчас феноменологический анализ упругого и неупругого рассеяния протонов при энергии 181 МэВ [96] не является исключением. Входящая в выражение (10.4) для $U_{DEB}(r)$ каждая из частей – центральная $U_c(r)$ и спин-орбитальная $U_{s.o.}(r)$ – характеризуется двумя составляющими: вещественной и мнимой. Выразив каждую из них радиальной функцией, авторы работы [96] получили наглядное сравнение соответствующих радиальных зависимостей в двух случаях: для U_{DEB} и для стандартных потенциалов, полученных с применением кода, основанного на обычном уравнении Шредингера.

Подобно стандартной модели МИВ (1.7), в случае применения потенциала U_{DEB} допускается распространение подхода МИВ на возбуждение коллективных состояний. Здесь, как и раньше, требуется вычисление амплитуды неупругого рассеяния или, другими словами, T -матричного элемента возбуждения состояния $|JM\rangle$ в четно-четном ядре. Только теперь вместо деформированной части оптического потенциала ΔU применяется переходной оператор ΔU_{DEB} . Если использовать только члены первого порядка параметров деформации, то деформированная часть потенциала U_{DEB} возникает обычным образом из выражения (10.4) и приобретает следующий схематический вид:

$$\Delta U_{DEB} = \Delta U_c + \Delta \bar{U}_{s.o.} \quad (10.5)$$

По существу, мы здесь исходим из того, что в первом порядке деформация скалярного и векторного потенциалов U_s и U_0 осуществляется тем же самым способом, что и для центрального потенциала стандартной модели. Другими словами, предполагается, что потенциалы U_s и U_0 следуют за соответствующими плотностями (скалярной и векторной) и, таким образом, их деформации определяются из отклонений плотностей от сферических.

Как и в случае традиционного шредингеровского подхода, протон-ядерные потенциалы Дирака обычно образуются двумя способами. Первый (феноменологический) заключается в подходящей параметризации ядерной T -матрицы. Спецификой дираковской параметризации является лишь дополнительное условие, связанное с необходимостью соблюдения требования ковариантности. Второй способ, часто называемый микроскопическим, построен на расчетах, основанных на нуклон-нуклонных амплитудах. Особенность дираковского формализма состоит лишь в том, что в таких расчетах используется специальная форма релятивистского импульсного приближения.

Когда мы применяем обозначение U_{DEB} , то мы тем самым подчеркиваем, что эти потенциалы основаны на уравнении Дирака и приспособлены для использования в вычислениях шредингеровского типа. Однако широко в литературе, так же, как и выше в нашем изложении, для большей выразительности приводится гипертрофированная трактовка. Согласно ее, уравнение Дирака для рассеяния протонов со скалярным (S) и векторным (V) потенциалами трансформируется в «эквивалентное» уравнение Шредингера. Однако, как справедливо утверждается в работе [139], эффективные потенциалы, генерируемые таким способом, являются слишком сложными и перегруженными составляющими, что видно, например, из выражений (6.5, 8.2). В результате этого получаемые шредингерово-подобные уравнения типа (5.3, 6.2) лишь очень условно можно представлять как альтернативу уравнения Дирака (4.2).

Для того чтобы избежать подобной двусмысленности, ниже, излагая результаты работы [96], мы будем следовать ее терминологии, т.е. используя потенциал U_{DEB} , будем просто называть его «основанным на уравнении Дирака».

Однако, прежде чем рассмотреть деформацию потенциала в U_{DEB} в работе [96], выясним, не возникло ли в появившихся в последующие десятилетия публикациях каких-либо новых взглядов на сам потенциал типа U_{DEB} . Для такого рассмотрения возьмем, например, работу [132]. Оказалось, что в большинстве выполненных релятивистских расчетов или произведенных анализов авторы по-прежнему исходят из большого скалярного (S) и векторного (V) средних полей, которые смещают массу нуклона от величины m к величине m^* в соответствии с соотношением (8.1). Кроме того, в большинстве релятивистских моделей предполагается, что так называемая самоэнергия, или средние поля (S , V), действительно являются независимыми от энергии или же от переданного импульса. Разумеется, что подобное приближение можно считать вполне удовлетворительным лишь при передаче малых импульсов, а затем оно становится не столь реалистичным по мере возрастания переданных импульсов [132]. Тем не менее, в рамках дираковской оптической модели процедура подгонки протон-ядерного упругого рассеяния позволяет создать скалярный и векторный оптические потенциалы, которые в целом имеют гораздо меньшую энергетическую зависимость, чем нерелятивистское среднее поле [132].

Когда уравнение Дирака сокращается до шредингерово-подобной формы, то эффективное нерелятивистское среднее поле представляется в виде

$$U_{opt} \equiv U_c = S + \frac{E}{m}V + \frac{1}{2m}(S^2 - V^2), \quad (10.6)$$

что обычно трактуется как оптический потенциал, а именно его центральная часть. Здесь E – общая энергия нуклона с массой m и кинетической энергией в лабораторной системе $E_{лаб}$, т.е. $E = E_{лаб} + m$. Последнее выражение по существу оказывается не чем иным, как частным случаем формулы (7.5). Составляющая в (10.6), содержащая квадратичные зависимости, в принципе, повторяет предыдущее выражение (6.8), являющееся также компонентом центрального потенциала U_{cent} (6.5). Различие в квадратичных составляющих двух сравниваемых оптических потенциалов заключается лишь во входящих в них коэффициентах: $1/2 m$ (10.6) и $1/2 E$ (6.8), соответственно. Однако, если учесть, что $E = E_{лаб} + m$ и что величина энергии, эквивалентной массе нуклона, близка к значению 1 ГэВ [140],

то в случае не очень больших энергий $E_{\text{лаб}}$ различие в указанных коэффициентах двух феноменологических формул можно считать не принципиальным.

Аналогичное утверждение касается и линейных членов центральных оптических потенциалов, представленных в формуле (10.6), с одной стороны, и в формулах (6.5, 6.7) – с другой. Здесь перенормировка скалярной (S) и векторной (V) силы осуществляется при помощи так называемого фактора Лоренца $\gamma = E/m$ [98]. Очевидно, что при не очень больших энергиях протонов $E_{\text{лаб}}$ этот множитель близок к единице. В этом случае соответствующие линейные составляющие феноменологических формул (6.5, 6.7, 10.6) становятся вполне сопоставимыми между собой.

ЛЕКЦИЯ 11

Практическое применение деформационных моделей к неупругому рассеянию протонов

Линейная энергетическая зависимость для U_{opt} , предполагаемая в выражении (10.6), оказывается хорошо согласующейся с экспериментальными данными для величины $E_{\text{лаб}}$, приобретающей значения порядка 200–300 МэВ или меньше. Однако формула (10.6) с постоянными силами S и V значительно переоценивает энергетическую зависимость U_{opt} при величинах $E_{\text{лаб}}$, превосходящих 300 МэВ. В результате этого с целью воспроизведения экспериментальных данных по упругому рассеянию при более высоких энергиях требуется коррекция $U_{\text{opt}} \approx U_c$. Она заключается прежде всего в необходимости введения энергетической зависимости как силы S , так и V [132].

В самом предельном (грубом) приближении $V = -S$, а $E = E_p = t$, где по-прежнему E_p – общая кинетическая энергия, а t – масса нуклона [135]. В результате какими бы большими ни были скалярный и векторный потенциалы, они, согласно (10.6), должны были бы в этом предельном случае погасить линейную часть центрального оптического потенциала U_c . Однако для рассеяния при промежуточных энергиях потенциалы S и V становятся комплексными, и, следовательно, можно допустить, что импульсы нуклонов также приобретают комплексный характер [104, 135]. Вытекающую отсюда линейную часть эффективного центрального потенциала, представленного в (10.6),

$$U \approx S + \frac{E}{m} V, \quad (11.1)$$

в итоге можно трактовать как результат релятивистской динамики [104].

Далее подчеркнем еще раз, что если центральный потенциал образуется сложением двух сил (S и V), то спин-орбитальный потенциал, наоборот, создается их разностью. Следовательно, даже если в эффективном центральном потенциале силы S и V «погасят» друг друга, то в спин-орбитальном потенциале и в потенциале Дарвина силы S и V ведут себя таким образом, что только «укрепят» друг друга. Подобное поведение сил становится одним из важнейших проявлений релятивизма. В итоге именно разница между скалярным и векторным членами дираковского оптического потенциала должна оказаться достаточно чувствительной к спиновым наблюдаемым в рассеянии протонов [70, 73, 80].

В том же формате, что использован для центрального оптического потенциала (10.6, 11.1), спин-орбитальный потенциал приобретает следующий вид [141]:

$$U_{s.o.} = -\frac{1}{2mr} \frac{\frac{\partial}{\partial r}(S-V)}{E+m+S-V}. \quad (11.2)$$

Различие между этим выражением и тем, что дано выше, в формуле (6.12), состоит по существу лишь в нормировочном коэффициенте. К этому вопросу мы еще вернемся, но, вообще говоря, сейчас мы имеем дело с феноменологическими подходами. Для них характерны подгоночные процедуры, выполняемые при помощи специальных компьютерных программ. Если те или иные фигурирующие нормировочные коэффициенты представить аналитическим образом, то они иногда приобретают чрезвычайно громоздкий характер. Это показано выше на конкретном примере и продемонстрировано в формуле (6.13).

После детально рассмотренных положений, касающихся оптического потенциала релятивистского происхождения, мы вновь вернемся к работе [96]. Поскольку в ней производится анализ упругого и неупругого рассеяния протонов при $E_p = 181$ МэВ, то главное необходимое условие, которое должно было учитываться для согласия формулы типа (10.6) с экспериментом, безусловно выполняется. Мы собираемся рассмотреть достаточно тонкие явления, такие как деформации U_{DEB} , и сопоставить их с апробированными результатами традиционных нерелятивистских подходов. Итак, деформация оптического потенциала производится для того, чтобы получить переходной оператор ΔU_{DEB} с целью использования его в выражении типа (10.2) и вычисления соответствующих амплитуд неупругого рассеяния.

Начнем с того, что напомним выражения (10.4–10.5), следуя работе [96]. Заметим при этом, что дальнейшее изложение ведется нами в основном с методической целью. Поэтому хотя с тех пор представления о потенциале «шредингеровский эквивалент» (к которому иногда относят и потенциал DEB) значительно изменились, мы здесь будем придерживаться терминологии и формализма работы [96].

Итак, согласно [96], центральная часть потенциала DEB следующая:

$$U_c(r) = U_s + \frac{E}{m}[U_0 + V_C] + \frac{1}{2m}[U_s^2 - (U_0 + V_C)^2] + \\ + \frac{1}{2m}\left[3\left(\frac{D'}{D}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{D''}{D} - \frac{1}{r}\frac{D'}{D}\right], \quad (11.3)$$

$$\text{где} \quad D(r) = E + m + U_s(r) - U_0(r) - V_C(r),$$

$$D' = \frac{dD}{dr} \dots \text{ и т.д.}, \quad (11.4)$$

и по-прежнему принята система отсчета с $\hbar = c = 1$. Напомним, что выражение $D(r)$ является только числителем формулы (6.9), касающейся значения $A(r)$.

Если сравнивать выражение (11.3) со сходным по смыслу (8.2), а первую формулу (11.4) с использованной ранее формулой (7.7), то следует отметить, что в новых представлениях (11.3) и (11.4) не пренебрегается кулоновским потенциалом V_C . С точки зрения включения кулоновских сил и вышеприведенное выражение (6.5) для центральной части оптического потенциала было заметно ограничено по сравнению с новой формулой (11.3). Правда, в практическом анализе квадратичными кулоновскими потенциалами, содержащимися в выражении (11.3), все же пренебрегалось [96]. Кроме того, кулоновский член и в выражении (11.4) при аналитических исследованиях [96] опускался.

Остановимся на некоторых аспектах кулоновского потенциала, проявляющихся в рассеянии. Когда мы рассматриваем картину рассеяния и описываем ее стационарной

волновой функцией $\psi(r)$, то последняя может являться решением уравнения Шредингера, независимого от времени и, в частности, представленного формулой (1.3). Такая волновая функция должна удовлетворять, согласно [142], асимптотическому граничному условию типа (1.5) или (1.10). При этом ориентация наблюдения определяется направлением вектора $\mathbf{r}$. Указанное граничное условие соответствует экспериментальной ситуации при $r \rightarrow \infty$. Тогда первое слагаемое в (1.5) или (1.10) представляет падающий пучок частиц, а второе слагаемое – рассеянные частицы.

Для того чтобы асимптотическое поведение выражений (1.5) и (1.10) было совместимо с уравнением Шредингера (1.3), нужно, чтобы входящий в него потенциал убывал асимптотически быстрее, чем $1/r$ (см., например, [8, 15, 20, 24, 142]). Потенциалы, убывающие на бесконечности, в частности, как обратные степени r , надо рассматривать как потенциалы с большим радиусом действия [142]. Таким образом, кулоновские поля, характеризующиеся как $U(r) = B/r$ [8], убывают слишком медленно и, следовательно, не

$$r \rightarrow \infty$$

удовлетворяют ряду требований, при которых были получены важные результаты: асимптотическое условие, асимптотический вид стационарных волновых функций и т.д. [24]. Суть невыполнения асимптотического условия заключается в том, что потенциал убывает настолько медленно, что влияние такого потенциала на частицы сказывается даже в том случае, когда частицы движутся «вдали друг от друга». В литературе описан ряд способов преодоления подобных трудностей (см., например, [24, 142]).

Рассматриваемые нами примеры в выражениях (11.3 и 11.4) относятся к такому случаю, который можно охарактеризовать как сумму кулоновского и короткодействующих потенциалов. В результате суммарный потенциал имеет по существу тот же самый дальнодействующий «хвост», что и сам кулоновский потенциал. Можно даже сказать, что это наиболее характерный случай для ядерной физики. Для него разработан целый набор методов обрезания или экранирования кулоновского потенциала. Сейчас мы ограничимся только самым общим замечанием, приведенным в [22]. Суть его заключается в том, что если обрезания потенциала сделаны в достаточно удаленных точках, то обрезанные потенциалы приводят к результатам, которые не имели бы каких-либо критических ограничений и даже вообще их нельзя было бы наблюдать в типичном эксперименте.

Во всех случаях, когда уравнение Дирака сокращается до формы шредингеровского типа, центральный нуклон-ядерный потенциал приобретает дополнительные квадратичные зависимости сил S и V или их произведения, что было показано в выражениях (6.5, 6.8, 7.2, 8.2, 10.6), а теперь в несколько другом виде – и в формуле (11.3). Эти члены играют немаловажную роль в упругом протон-ядерном рассеянии и являются ответственными за энергетически зависимую форму «дна винной бутылки», которую при этом получает центральный оптический потенциал.

Итак, когда производится трансформация уравнения Дирака и релятивистские задачи сводятся к «эквивалентным» шредингеровским задачам, появляются (в том или ином виде) члены, содержащие квадраты исходных дираковских потенциалов. Очевидно, что эти члены доминируют в области начала координат, а их знаки зависят уже не от знаков исходных дираковских потенциалов (релятивистского скаляра или четвертого компонента релятивистского вектора). Теперь соответствующий эффективный центральный потенциал, зависящий от энергии, определяется трансформационными свойствами релятивистского потенциала [142].

В трансформированный оптический потенциал $U_{DEB}(r)$ включается и соответствующая спин-орбитальная часть, как указано в выражении (10.4). Если воспользоваться представлением (11.4), то спин-орбитальный член $U_{s.o.}(r)$, входящий в (10.4), формируется теперь следующим образом:

$$U_{s.o.}(r) = -\frac{1}{2m} \frac{1}{D} \frac{1}{r} \frac{dD}{dr}, \quad (11.5)$$

где главное отличие, например, от выражения (11.2) состоит в том, что здесь не пренебрегается кулоновским потенциалом.

После того как мы достаточно детально представили в формулах (11.3–11.5) все основные компоненты потенциала $U_{DEB}(r)$, можно к последнему применить деформационную процедуру (10.5). Тогда, согласно [96], получим:

$$\begin{aligned} \Delta U_c \approx \Delta U_s + \frac{E}{m} \Delta U_0 + \frac{1}{m} [U_s(\Delta U_s) - U_0(\Delta U_0)] + \\ + \frac{3}{4m} \left[\frac{D'}{D^2} (\Delta U_s - \Delta U_0)' - \left(\frac{D''}{D} \right)^2 \left(\frac{\Delta U_s - \Delta U_0}{D} \right) \right] + \\ + \frac{1}{4m} \left[\frac{\nabla^2 D}{D^2} (\Delta U_s - \Delta U_0) - \frac{\nabla^2 (\Delta U_s - \Delta U_0)}{D} \right]. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Это выражение характеризует деформированную часть центрального потенциала.

Аналогично можно представить и деформированную часть спин-орбитального потенциала. Она в соответствии с [96] приобретает вид:

$$\Delta U_{s.o.} \approx -\frac{1}{2m} \frac{1}{D} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla [\Delta U_s - \Delta U_0] \times \frac{\nabla}{i}. \quad (11.7)$$

Выражения (11.6) и (11.7) указаны как приближительные уже хотя бы по той причине, что в них опущены составляющие, содержащие кулоновский потенциал V_C . Кроме того, в формулу (11.7) не включен сравнительно малый член, пропорциональный $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}$. Но в целом общая операционная структура $\Delta U_{s.o.}$ в (11.7) такова, что она позволяет охарактеризовать это выражение как обладающее основными чертами известной полной томасовской (full Thomas) формы, что и отмечено в работе [96].

Для дальнейшего рассмотрения сконцентрируем внимание на структуре операторов в формуле (11.7), не вникая пока в детали сомножителя, заключенного в квадратные скобки. После этого проведем сравнение выражения (11.7) с другими интересующими нас сейчас формулами, приведенными, в частности, в [1]. Из сравнения можно увидеть, что главная операционная структура сопоставляемых формул достаточно сходная в том смысле, что она характеризуется комбинацией векторных операторов градиента ∇ .

Продemonстрируем ниже, что полная томасовская форма является универсальной для спин-орбитальных потенциалов. Мы увидим, что из этой формы естественным образом, как частные случаи, возникают спин-орбитальные составляющие оптического и переходного потенциалов, которые содержат оператор $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})$. Напомним, что подобные члены были определяющими в формулах, представленных, в частности, в [1], а также в формуле (10.4).

Объединим все упомянутые выражения, содержащие полную томасовскую форму. С этой целью представим их в некотором обобщенном виде. При этом подчеркнем, что схема такого конструирования в принципе схожа с той, что использовалась при получении

выражения (11.7). Это значит, что здесь в качестве первоисточника служило уравнение Дирака.

Для упрощения ситуации, связанной с ядерными силами, рассмотрим движение электрона в потенциальном поле U . При этом электрон будет испытывать потенциал спин-орбитальной связи томасовского типа (см., например, [99]):

$$U_{s.o.} = -i \left(\frac{\hbar}{2mc} \right)^2 \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla U \times \nabla). \quad (11.8)$$

Здесь потенциал $U(\mathbf{r})$ дан в общем виде, т.е. он не является изотропным, а имеет определенную угловую зависимость, так что выражение для него может быть представлено путем разложения по мультиполям (см. [34]). Если же $U(\mathbf{r})$ оказывается центральным (изотропным), то выражение (11.8) сокращается и упрощается до следующего:

$$U_{s.o.} = \left(\frac{\hbar}{2mc} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{\partial U(r)}{\partial r} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}. \quad (11.9)$$

Преобразование формулы (11.8) в (11.9) нетрудно понять, если вспомнить известные определения. Так, полный векторный оператор градиента ∇ был представлен выше формулой (2.7). Если же мы ограничиваемся рассмотрением центрально-симметричного поля, то мы можем использовать только первую составляющую двухкомпонентного выражения (2.7) для ∇ , т.е. всего лишь $\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d}{dr}$ или $\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ (см. [15, 19, 34]), как мы уже и поступили раньше [1]. После того как эту составляющую градиента ∇ мы вставим в формулу (11.8) вместо левого оператора ∇ , мы должны произвести в новой формуле хорошо известную в квантовой механике [8, 15, 20, 42] замену:

$$\mathbf{L} = -i\hbar(\mathbf{r} \times \nabla). \quad (11.10)$$

Здесь $\mathbf{L}$ – оператор орбитального углового момента, как в формуле (11.9). В изотропном пространстве он представляет орбитальный момент количества движения [42]. В результате указанных простых манипуляций мы и получим упрощенное выражение (11.9).

Несмотря на то, что мы уже немало внимания уделили формам спин-орбитальной связи, к этим вопросам, по нашему мнению, целесообразно подойти с близких, но несколько по-другому сформулированных позиций, следуя работе [99].

Рассмотренная нами картина по существу должна быть справедливой при использовании коллективной модели. Строго говоря, такая модель применима только в случае сильных коллективных возбуждений вибрационных и ротационных состояний. Однако на практике оказывается, что такой подход дает достаточно хорошее описание экспериментов для многих слабых неколлективных переходов. Вообще сущность подобной модели, как бы мы ее ни квалифицировали, состоит в том, что оптический потенциал следует за формой ядра, когда она деформируется относительно сферической формы. Обычное модельное предписание заключается в том, что производится деформация поверхности $r = R$, согласно выражению, представленному в общем виде формулой (3.4).

Для лучшего понимания остановимся сейчас на частном случае аксиально-симметричной деформации. Тогда формулы (3.4) и (3.5) приобретут следующий вид:

$$R \rightarrow R + \sum_L \delta_L Y_L(\theta). \quad (11.11)$$

Здесь параметр δ_L обозначает так называемую деформационную длину для мультиполя 2^L . Этот параметр часто записывается как

$$\delta_L = \beta_L R. \quad (11.12)$$

При этом физическое содержание параметра деформации $\beta_L = \beta_1$ определяется формулой (3.4). В (11.11) $Y_L(\theta)$ обозначает соответствующую сферическую гармонику (шаровую функцию), которая в более общем виде представлена в выражении (2.1). Часто используется только первый порядок величины δ_L . Это касается расчетов, которые выполняются по МИВ. Однако члены высших порядков также включаются, когда проводятся расчеты по МСК, как это демонстрируется в формуле (3.8).

Для наглядности еще раз подчеркнем, что сущность оптической модели состоит в том, что в результате представлений, данных в (11.11), радиус R оказывается параметром потенциала оптического характера U . При этом потенциал U можно разложить в ряд Тейлора. Если же по-прежнему исходить из аксиальной симметрии, то такое разложение, согласно [99], принимает следующий вид:

$$U(r, R) \rightarrow U(r, R) + \sum_L \delta_L Y_L(\theta) \frac{\partial U(r, R)}{\partial R} + \dots \quad (11.13)$$

Появляющиеся в этом случае несферические члены как раз и могут вызвать неупругое рассеяние. Именно подобные несферические члены различного сорта и были продемонстрированы в несколько другом виде в формулах, представленных нами в [1].

Деформацию ядра типа (11.11) можно определить как поверхностную. Ее обычно применяют и к феноменологическому спин-орбитальному потенциалу. Функция этого потенциала (обозначим ее U_s , следуя [99]), хотя и параметризуется свободно, но все же в принципе сохраняется подобной плотности ядра. Для ее представления, как правило, выбирается распределение Вудса–Саксона, как было указано в лекции 1.

Предполагается, что форма спин-орбитального потенциала (11.8) является довольно универсальной и ее можно распространить на феноменологическое описание протон-ядерного рассеяния. Это становится особенно убедительным, если учесть, что сходная («градиентная») структура оператора спин-орбитального взаимодействия в нерелятивистской теории может быть установлена даже из самых общих физических соображений. Более того, без включения вектора градиента ядерной плотности спин-орбитальный потенциал вообще не может быть построен. В центральной части ядра, где плотность близка к постоянной, потенциал такого рода должен быть очень малым. Только в поверхностной области ядра может появиться важный добавочный вектор градиента плотности. Поэтому часто и утверждается, что основной вклад спин-орбитальных сил сосредоточен на поверхности ядра [15, 17, 23, 46].

Итак, будем исходить из поверхностной деформации в виде (11.11). Кроме того, допустим для деформационной длины δ (11.12) только первый порядок, как это и обозначено в (11.13). При этом более высокие порядки здесь опустим, считая, что они могут учитываться в МСК. Тогда протоны, рассеиваемые ядром, должны испытывать общий спин-орбитальный потенциал, который, согласно [99], можно разложить на следующие составляющие:

$$\begin{aligned}
-i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla U_s \times \nabla) = & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U_s}{\partial r} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \right] + \\
+ \delta_L \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial U_s}{\partial R} Y_L(\theta) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} - \frac{i}{r} \frac{\partial U_s}{\partial R} \frac{\partial Y_L}{\partial \theta} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a}_\theta \times \nabla) \right] + \dots \quad (11.14)
\end{aligned}$$

Первая часть разложения (первые квадратные скобки) по существу и образует спин-орбитальный член типа (11.9) для «сферического» потенциала. При этом параметры U_s как раз и могут быть определены из упругого рассеяния поляризованных протонов.

Все второе слагаемое (вторые квадратные скобки) представляет деформированную часть, которая может вносить вклад в неупругое рассеяние. Напомним, что выражение (11.14) по-прежнему относится к упрощенному варианту – аксиально симметричной деформации. Символ $\mathbf{a}_\theta$ обозначает единичный вектор, перпендикулярный к $\mathbf{r}$ и направленный в сторону увеличения θ . Как видно, второе слагаемое в (11.14) состоит из двух частей, причем первая из них содержит оператор $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})$, а вторая – оператор градиента.

Мы и раньше, в работе [1], отмечали, что деформированная часть спин-орбитального взаимодействия может быть разложена на два компонента. Правда, явный вид этих компонентов не был детально выписан, и сейчас мы это сделаем для того, чтобы сравнить их с упрощенным феноменологическим разложением (11.14), а также сопоставить с результатами спин-орбитальных потенциалов, извлеченных из решения уравнения Дирака для рассеяния протонов (10.4, 11.5 и 11.7).

Обратимся к подходу, например [1], в котором даны выражения с более общим представлением формулы (11.11). Для спин-орбитальной части протонно-ядерного взаимодействия разложим присутствующую там плотностную функцию $f(r, R_{s.o.}, a_{s.o.})$, характеризующую спин-орбитальный потенциал, по первому порядку параметра $a_{s.o.}$ (3.5). После этого разложения и ряда простых операций разделим полный спин-орбитальный потенциал на отдельные составляющие по существу с той же самой структурой, что представлена в формуле (11.14).

Тогда первый член разложения плотностной функции дает так называемый центральный потенциал, который является не чем иным, как спин-орбитальной частью оптического потенциала. А второй член разложения той же плотностной функции f приводит к деформированному спин-орбитальному потенциалу. Используя математические и квантовомеханические формулировки, в частности (2.7) и (11.10), мы приходим, согласно [19], к следующим двум выражениям, которые в сумме заменяют общий деформированный спин-орбитальный потенциал $\Delta U_{s.o.}$ [1, 19]:

$$U_{s, def}(1) = (\hbar / m_\pi c)^2 (V_{s.o.} + iW_{s.o.}) \alpha_{s.o.}(\hat{\mathbf{r}}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial R_{s.o.}} \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}, \quad (11.15)$$

$$U_{s, def}(2) = (\hbar / m_\pi c)^2 (V_{s.o.} + iW_{s.o.}) \frac{\partial f}{\partial R_{s.o.}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[\nabla \alpha_{s.o.}(\hat{\mathbf{r}}) \times \frac{1}{i} \nabla \right]. \quad (11.16)$$

Если учесть, что для радиального параметра $\alpha(\hat{\mathbf{r}})$ может быть применено традиционное мультипольное разложение, то становится ясно, что последние два выражения (11.15 и 11.16) по своей сути являются действительно сходными с двумя соответствующими членами разложения (11.14). Напомним, что именно эти два члена, подобно выражениям (11.15 и 11.16) для деформированных потенциалов, как раз и определяют основные эффекты, связанные со спином, в неупругом канале.

ЛЕКЦИЯ 12

Оптическая модель ядра в неупругом рассеянии протонов с различными приближениями и интерпретациями

В предыдущей лекции мы остановились на некоторых аспектах релятивистского борновского приближения в методе искаженных волн применительно к коллективным возбуждениям ядра. По своей основополагающей сути такой подход можно рассматривать как дальнейшее расширение нерелятивистской модели в рамках МИВ для ядерных возбуждений коллективного типа. Следует подчеркнуть все же наличие двух специфических базовых ингредиентов в релятивистском МИВ [138]. Первый из них состоит в том, что искаженные волны, описывающие релятивистское нуклон-ядерное движение (10.2), являются решением уравнения Дирака (9.10) с комплексным оптическим потенциалом, включающем скалярный и лоренцевый векторный потенциалы (10.1). Второй специфический ингредиент релятивистского МИВ заключается в том, что переходной оператор образуется в результате деформации того же самого векторного и скалярного потенциалов, хотя и на основе процедуры, аналогичной для нерелятивистского случая.

Такой переходной оператор, входящий в релятивистский T -матричный элемент при возбуждении состояния $|JM\rangle$ в четно-четном ядре (10.2), выражен формулой (10.3) в предыдущей лекции. Для большей наглядности сейчас мы представим в сходном виде также и соответствующий переходной оператор для традиционного, нерелятивистского МИВ. При этом как в главных обозначениях, так и в сравнениях результатов релятивистского и нерелятивистского МИВ мы будем в основном придерживаться работы [96].

Итак, таким же образом, как и в формуле (10.3), а также путем включения только членов первого порядка в параметры деформации мы получаем переходной матричный элемент для нерелятивистского МИВ:

$$\langle JM | \Delta U | 00 \rangle = C(J)F(r)Y_J^{*M}(\Omega). \quad (12.1)$$

Здесь $C(J)$ – функция параметра деформации и спина возбужденного состояния. $F(r)$ – комплексный формфактор общего переходного потенциала. Этот полный формфактор $F(r)$ может включать в себя как центральный радиальный формфактор, так и два спин-орбитальных радиальных формфактора, соответствующих деформированному спин-орбитальному взаимодействию, которое было представлено в (11.14 – 11.16).

По существу, все перечисленные радиальные формфакторы в случае нерелятивистского МИВ приводились нами ранее в достаточно развернутом виде (см., в частности, [1]). Однако эти выражения все же недостаточно детализованы для полного сравнения с результатами обычно применяемого релятивистского МИВ. Дело в том, что в релятивистском МИВ радиальные зависимости ядерных потенциалов $f(r, R, a)$ принято брать с разными параметрами для вещественных и мнимых частей потенциалов, что видно, например, из (4.3 и 4.4). Согласно этим формулам, такой выбор касается как скалярного, так и векторного потенциалов. Поскольку именно комбинация этих двух последних потенциалов создает как искажающий, так и переходной спин-орбитальный потенциалы (11.4, 11.5, 11.7), то действительно целесообразно оставлять независимыми формфакторы вещественных и мнимых составляющих всех произведенных потенциалов.

Из формул, приведенных, в частности, в [1], видно, что указанная независимость сохраняется только для радиального формфактора центрального потенциала, а в случаях спин-орбитальных потенциалов она игнорируется. Поэтому, если мы хотим более корректно сопоставлять результаты релятивистского и нерелятивистского МИВ, выражения для радиальных формфакторов переходных потенциалов следует представить в несколько расширенной трактовке, например, как это дано в работе [96]. Запишем эти

выражения в более детальном виде по сравнению с представленными в [1], упростив лишь формфактор центрального потенциала, поскольку сейчас мы будем проводить анализ только для промежуточных энергий протонов. В результате набор формфакторов, которые входят в выражение (12.1), оказывается следующим. Так, центральный формфактор приобретает вид:

$$F_c(r) = \left[-V_0 \frac{\partial}{\partial R_0} f(r, R_0, a_0) - iW \frac{\partial}{\partial R_i} f(r, R_i, a_i) \right]. \quad (12.2)$$

Если мы выбираем деформированное спин-орбитальное взаимодействие в полной томасовской форме, то в расчеты матричного элемента (12.1) по-прежнему надо включать два спин-орбитальных радиальных формфактора: $F_{s.o.}^{(1)}$ и $F_{s.o.}^{(2)}$. Их детальный вид следующий:

$$F_{s.o.}^{(1)}(r) = \left(\frac{\hbar}{m_\pi c} \right)^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[V_{s.o.} R_{s_1} \frac{\partial}{\partial R_{s_1}} f(r, R_{s_1}, a_{s_1}) + iW_{s.o.} R_{s_2} \frac{\partial}{\partial R_{s_2}} f(r, R_{s_2}, a_{s_2}) \right], \quad (12.3)$$

$$F_{s.o.}^{(2)}(r) = \left(\frac{\hbar}{m_\pi c} \right)^2 \left[V_{s.o.} R_{s_1} \frac{\partial}{\partial R_{s_1}} f(r, R_{s_1}, a_{s_1}) + iW_{s.o.} R_{s_2} \frac{\partial}{\partial R_{s_2}} f(r, R_{s_2}, a_{s_2}) \right]. \quad (12.4)$$

Выражения (12.3, 12.4), данные в [96], дополняют представление о двухкомпонентном составе деформированного спин-орбитального взаимодействия в томасовской форме, как это было показано в формулах (11.14 – 11.16). В используемых сейчас обозначениях (12.2–12.4) сферический оптический потенциал нуклон-ядерного рассеяния будет иметь вид:

$$U(r) = V_C(r) - V_0 f(r, R_0, a_0) - i W f(r, R_i, a_i) + \left(\frac{\hbar}{m_\pi c} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[V_{s.o.} f(r, R_{s_1}, a_{s_1}) + i W_{s.o.} f(r, R_{s_2}, a_{s_2}) \right] \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}. \quad (12.5)$$

Это выражение представляет модель стандартного оптического потенциала. Для сравнения подчеркнем, что формулы (11.3 – 11.5) в свою очередь характеризуют модель, основанную на уравнении Дирака.

В выражение (12.5) входит кулоновский потенциал V_C . Его деформация не включена в настоящее изучение (12.5) только потому, что мы сейчас будем анализировать область промежуточных энергий протонов, где эффект такой деформации оказывается малым [96].

Радиальные формфакторы, эквивалентные выражениям (12.2–12.4) для стандартной модели, можно получить и для деформированных потенциалов, основанных на уравнении Дирака (11.6, 11.7). Мы не будем приводить здесь релятивистские формфакторы в явном виде из-за громоздкости их написания, а приведем их некоторое качественное описание в сравнении с радиальными формфакторами стандартной модели, как это сделано в работе [96].

Такое сравнение двух типов формфакторов выполнено в указанной работе графически в случае анализа неупругого рассеяния протонов при $E_p = 181$ МэВ на ядре ^{40}Ca . Сравнение каждого формфактора двух моделей выявляет свои индивидуальные

особенности. Так, соответствующие формфакторы, в частности, оказываются сходными в одном диапазоне радиусов и различными в другом. Обнаруживаемые подобия или различия в радиальных зависимостях характеризуются как их формой, так и величиной. Но оказалось, что эти отмечаемые различия все же не столько существенные на фоне резкого контраста между вещественными и мнимыми формфакторами для релятивистского (DEB) и нерелятивистского (стандартного) потенциалов. При этом соответствующие (вещественные или мнимые) формфакторы для обоих потенциалов по своим базовым характеристикам являются весьма схожими.

Так, в частности, в работе [96] проведено графическое сравнение формфакторов типа $F_{s.o.}^{(1)}$ (12.3). В этом конкретном случае установлено [96], что как вещественные, так и мнимые части формфакторов $F_{s.o.}^{(1)}$ оказываются очень близкими по форме, но различными по величине для двух типов потенциалов – релятивистского и нерелятивистского.

Предпочтение тому или иному рассматриваемому здесь модельному формфактору можно дать, только основываясь на каких-либо более определенных или общих представлениях. В качестве последних могут служить деформационные ядерные характеристики: параметр деформации или же деформационная длина, приписываемые определенной мультипольности (11.12). Конечно, такие характеристики, получаемые из рассеяния конкретных частей, дают сведения по существу только о деформации соответствующего ядерного потенциала. Однако, взяв целый набор рассеиваемых частиц и варьируя их энергию, мы можем получить довольно усредненную картину, представляющую деформацию ядерного поля в более общем виде. Кроме того, эти результаты можно сопоставить с данными о деформации формы ядра, получаемыми другими методами (см., например, [59]).

Модельные параметры деформации ядра обнаруживаются в виде линейных коэффициентов T -матричных элементов неупругого перехода в МИВ (см., например, [1]). Такую зависимость легко понять в рамках представляемой коллективной модели, если учесть, что для радиального деформационного параметра $\alpha(\hat{r})$, определяемого в общем виде по формулам в (3.5), допустимо традиционное мультипольное разложение. Тогда, согласно [19], матричный элемент, содержащийся в амплитуде перехода (10.2), приобретает простой вид:

$$\langle IM | \alpha(\hat{r}) | 00 \rangle = \beta_I R (2I + 1)^{-1/2} Y_I^{*M}(\hat{r}). \quad (12.6)$$

В случае ротационного возбуждения коэффициент β_I является параметром деформации, а R представляет радиальный параметр для особой части рассматриваемого взаимодействия [19]. Обычно в любых коллективных моделях берут одно и то же значение β_I для всех независимых от спина взаимодействий. Однако параметру деформации $\beta_I^{s.o.}$, зависящему от спина, часто «позволяется» быть другим. Тогда можно исследовать дополнительные эффекты влияния такой деформационной особенности на результаты рассеяния.

Параметры деформации β_I и $\beta_I^{s.o.}$ обычно являются линейными нормировочными коэффициентами соответствующих составляющих матрицы $T_{\mu_f, \mu_i}(M)$ неупругого рассеяния (10.2). Поэтому любые экспериментально наблюдаемые величины или их комбинации, в принципе, позволяют определять деформационные параметры β_I и / или $\beta_I^{s.o.}$, если только получаемые результаты экспериментов могут быть выражены в терминах указанных T -матриц. Тогда параметры деформации извлекаются, как обычно, путем сравнения экспериментальных и расчетных данных. В работе [1] мы приводили много подобных примеров. При этом мы демонстрировали, что дифференциальное сечение определяется квадратом амплитуды рассеяния. А угловое распределение анализирующей

способности характеризуется интерференцией между различными амплитудами рассеяния. Подобная интерференция отсутствует в дифференциальном сечении и, следовательно, содержит дополнительную информацию.

В терминах рассматриваемых нерелятивистских выражений дифференциальное сечение неупругого рассеяния протонов характеризуется следующей формулой [19]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \sigma(\theta) = \left(\frac{m^*}{2\pi\hbar^2} \right)^2 (k_f / k_i) \cdot \frac{1}{2} \sum_{\mu_i \mu_f M} |T_{\mu_f, \mu_i}(M)|^2, \quad (12.7)$$

где m^* – приведенная масса.

В теории рассеяния и, в частности, построения амплитуды $T_{\mu_f, \mu_i}(M)$ важную роль, как известно [19, 23, 28], приобретает возможность связать волновые функции, относящиеся к одной системе координат, с волновыми функциями в другой системе координат. В рассматриваемом случае мы должны уметь делать следующее преобразование, а именно: переходить от фиксированных в пространстве осей, характеризующих падающий пучок частиц, к осям, связанным с предметом нашего изучения, т.е. ядрам. С соответствующими теоретическими процедурами можно ознакомиться в широко известных монографиях [15, 17, 23, 24, 42].

Некоторые важные составляющие окончательного выражения для T -матрицы приведены в виде интегралов [1]. Анализ T -матрицы в целом [19] показывает, что она обладает определенными свойствами, на которых мы остановимся ниже. Так, прежде всего, T -матрица является функцией переменной величины M , определяемой значением I – квантовым числом углового момента ядра в определенном состоянии, т.е. спином ядра. Другими словами, $M = I_z$ – проекция углового момента I на пространственно-фиксированную ось (см. [59, 143]). В рассматриваемом сейчас случае [19] ось z выбрана вдоль k_i , т.е. направления падающего пучка частиц. Ясно видно из выражений для дифференциального сечения (12.7) и анализирующей способности $A(\theta)$, как указано в [1, 19] и будет представлено ниже, что суммирование в них проводится по всем допустимым значениям M при фиксированной величине I , являющейся одной из важнейших характеристик ядра в рассматриваемом возбужденном состоянии. То же самое суммирование по M мы увидим и в приведенных ниже других выражениях, представляющих спиновые характеристики неупругого рассеяния, таких как поляризация и вероятность спин-флипа.

Нерелятивистская теория рассеяния, как мы уже отмечали, детально представлена во многих доступных монографиях, поэтому здесь мы выделяем только некоторые ее аспекты, причем в основном в кратком изложении. Так, в теории рассеяния применяется (наряду с законами сохранения) так называемый принцип инвариантности. Инвариантность системы при любой из возможных операций симметрии (вращения, пространственная инверсия, обращение времени и т.д.) накладывает определенные, иногда достаточно жесткие ограничения на возможную форму амплитуды рассеяния [24].

В связи с этим следует подчеркнуть, что, используя инвариантность оператора Гамильтона H по отношению к изменению знака времени (т.е. замены будущего прошлым), можно получить довольно общие соотношения, связывающие вероятности переходов и эффективные сечения прямых и обратных процессов [15]. Отметим, что по определению оператор обращения времени изменяет знаки импульсов и спинов на противоположные для всех частиц, при этом оставляя неизменными их координаты [24]. Детализируем эти правила, опираясь на разъяснения в [15]. Так, по отношению к операции обращения времени ($t \rightarrow -t$) физические величины делятся на две группы. К первой из них относятся координаты точки, полная энергия, кинетическая энергия и ряд других, которые содержат время только в четных степенях. Эти величины не изменяются при обращении

времени. А ко второй группе величин относятся скорость, импульс, угловой момент, спиновый момент, а также все те другие, которые содержат время в нечетной степени. Величины второй группы меняют знак при обращении времени.

Разумеется, представленная только что картина слишком упрощенная. Инвариантность теории относительно обращения времени зависит также от свойств гамильтониана относительно зарядового сопряжения. Укажем на некоторые связанные с этим усложнения теории, следуя рассмотрению в [23]. Так, поскольку гамильтониан включает спины частиц, он не может быть вещественным, хотя бы потому что матрица Паули σ_y является чисто мнимой. В результате этого $H^* \neq H$. Однако теоретические исследования показывают, что $H^* = H$ в случае обращения спинов. В итоге оказывается, что волновая функция состояния, обращенного по времени, получается на основе комплексного сопряжения обычной волновой функции, а также обращения направлений всех спинов.

Цель выработки и соблюдения условий инвариантности заключается в том, чтобы сократить число независимых параметров, которые характеризуют T -матрицу или другую матрицу столкновений [17, 19]. Такие возможности открывают те или иные свойства симметрии. Например, в случае так называемого детального равновесия матрица столкновений симметрична в том смысле, что выявляется непосредственная связь между матричными элементами оператора столкновений для прямого и обратного переходов. Детальное равновесие вытекает из условия взаимности и имеет место в системах, свойства которых инвариантны по отношению к вращениям и отражению пространственных координат, а также по отношению к обращению времени [17].

Как аргументированно объясняется в [42], классические (не квантовые) теории всегда инвариантны, в частности к отражению координат. Эта инвариантность обсуждается редко, поскольку она очевидна.

Инвариантность к поворотам свидетельствует о том, что все члены того или иного уравнения ведут себя одинаково при вращениях. Подобно этому инвариантность к отражениям требует того, чтобы все члены уравнения также вели себя одинаково при отражении: были четными или нечетными [42].

В рассматриваемой работе по рассеянию протонов [19] учитывается, в частности, инвариантность T -матрицы к отражению от плоскости рассеяния. Это обстоятельство затем используется для сокращения суммирования по одному из спиновых индексов (например, μ_i) в тех конкретных случаях, когда экспериментально наблюдаемые величины выражаются в терминах T -матрицы. В конечном счете суммирования по μ_i ликвидируются в результате выявления определенных свойств симметрии для T -матрицы. Такое соотношение симметрии устанавливается в процессе анализа T -матрицы [1], когда все магнитные квантовые числа меняют свои знаки ($\mu_i \rightarrow -\mu_i$ и т.д.) [19].

За счет симметрии T -матрицы и соответствующей ликвидации суммирования по μ_i выражение для $d\sigma/d\Omega$ (12.7) упрощается. Так, при сокращении числа индексов суммирования квадрат модуля удваивается, в результате чего устраняется множитель $\frac{1}{2}$ перед знаком суммы. В итоге выражение (12.7) приобретает следующий вид [19]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \sigma(\theta) = \left(\frac{m^*}{2\pi\hbar^2} \right) (k_f / k_i) \sum_{\mu_f M} \left| T_{\mu_f, 1/2}(M) \right|^2. \quad (12.8)$$

Напомним, что мы рассматриваем систему координат, в которой $\hat{n}$ является единичным вектором вдоль направления $\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f$. В этой системе вероятность спин-флипа вдоль оси, перпендикулярной к плоскости рассеяния, представляется следующей формулой (см., в частности, [19]):

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sum_{\mu_f, M} (-1)^M T_{\mu_f, 1/2}(M) T_{\mu_f, 1/2}^*(-M)}{\sum_{\mu_f, M} |T_{\mu_f, 1/2}(M)|^2} \right]. \quad (12.9)$$

Как ясно видно, и здесь, подобно выражению (12.8), суммирование по μ_i также не производится.

На основе указанных выше свойств симметрии, являющихся следствием инвариантности T -матрицы при отражении, происходит сокращение индексов суммирования за счет μ_i и в других формулах, представляемых при помощи T -матриц. Действительно, об этом свидетельствует выражение для анализирующей способности $A(\theta)$, являющейся по существу в рассматриваемой геометрии азимутальной асимметрией в процессе рассеяния протонов:

$$A(\theta) = 2Im \sum_M (-1)^M T_{1/2, 1/2}(M) T_{-1/2, 1/2}^*(-M) / \sum_{\mu_f, M} |T_{\mu_f, 1/2}(M)|^2. \quad (12.10)$$

Аналогичное сокращение индексов суммирования за счет μ_i можно видеть и в формуле для поляризации при неупругом рассеянии протонов, исследуемых в той же самой геометрии. Если исходить из представления о поляризации протонов, данного в [1], и распространить его на процесс неупругого рассеяния, то выражение для поляризации (другого вида азимутальной асимметрии) приобретает в терминах формул (12.8 – 12.10) следующий вид [19]:

$$P(\theta) = 2Im \sum_M T_{-1/2, 1/2}(M) T_{1/2, 1/2}^*(M) / \sum_{\mu_f, M} |T_{\mu_f, 1/2}(M)|^2. \quad (12.11)$$

Как видно из сравнения выражений (12.10) и (12.11), два типа азимутальной асимметрии – $A(\theta)$ и $P(\theta)$ для неупругого рассеяния протонов, вообще говоря, различные. Однако $A(\theta)$ и $P(\theta)$ могут совпадать в упругом рассеянии протонов на ядре со спином, равным нулю, причем как в расчете [12], так и в эксперименте.

Выражения (12.8 – 12.11) приобретут, естественно, изменения, если их представить в формализме, изложенном в указанных уравнениях (1.24 – 1.29), данных в импульсном представлении. Кроме того, можно достигнуть существенного упрощения формулировок, если использовать плоские волны вместо искаженных (см. лекцию 1).

В качестве наглядного примера в предлагаемом плосковолновом пределе импульсного приближения в описании неупругого рассеяния протонов рассмотрим такую характеристику, как произведение анализирующей способности (12.10) и дифференциального сечения (12.8). Эта характеристика весьма активно использовалась автором в анализе [1] неупругого рассеяния поляризованных протонов на ядрах. Тогда

$$A_y(\theta)\sigma(\theta) = 4\pi \left(\frac{2\mu}{2\pi} \right)^2 \frac{(2I_f + 1)}{(2I_i + 1)} |\rho_J(q)^2| \times \left\{ 2t_R^{LS} t_I^c - 2t_I^{LS} t_R^c \right\}, \quad (12.12)$$

где индексы R и I означают действующую (реальную) и мнимую составляющие для центрального (c) и спин-орбитального (LS) компонентов эффективного «взаимодействия». Последнее построено на основе t -матрицы для свободного NN взаимодействия. здесь J –

общий переданный угловой момент, а I_i и I_f – спины ядра-мишени в начальном и конечном состоянии. Коэффициент μ в формуле (12.12) представляет энергию налетающей частицы в импульсном пространстве. Он был детально раскрыт выше в выражениях (1.25 – 1.27).

В упрощенном выражении (12.12) величина ρ_j является изоскалярной переходной плотностью ядерной материи в импульсном пространстве, которую можно представить, например, в следующем виде [47]:

$$\rho_j(q) = \left\langle f \left\| \sum_i j_j(qr_i) Y_j(\hat{r}_i) \right\| i \right\rangle. \quad (12.13)$$

Здесь графический символ $\langle \| \| \rangle$ обозначает приведенный матричный элемент. В формуле (12.3) он символизирует переход в ядре от начального состояния i к конечному состоянию f . В итоге все выражение (12.13) представляет матричные элементы однопольных мультипольных операторов. Суммирование производится только по нуклонам мишени. А зависимость $j(qr)$ является сферической функцией Бесселя.

Распределение $\rho_j(q)$ может быть получено расчетным путем на основе знания соответствующих волновых функций ядра. Это распределение может быть также установлено из анализа неупругого рассеяния электронов на том же ядре и при возбуждении тех же самых состояний, что и в неупругом рассеянии протонов.

Переходные плотности определяются ядерной структурой. Для ее изучения надо, например, измерить распределение $A_y \sigma$ (12.12), а затем его проанализировать, извлекая переходные плотности и таким образом получая информацию о ядерной структуре, что и производилось автором в работе [1].

ЛЕКЦИЯ 13

Применение некоторых элементов вышеизложенного формализма для анализа ряда экспериментальных данных по неупругому рассеянию протонов

Настоящая лекция составлена в основном из заключительной части работы автора [1]. В этой лекции главное внимание уделено сопоставлению различных моделей неупругого рассеяния протонов. При этом могут по-разному представляться возбуждения ядра, например, на его поверхности и во внутренней части. Меняется в этом случае также моделирование и протон-ядерного взаимодействия. Изложение здесь носит главным образом краткий характер. Более подробно со многими вопросами можно ознакомиться в более детализированных главах работы [1].

По существу, знание взаимодействия между налетающим протоном и нуклоном ядра должно вести к описанию динамики в моделях ядерных реакций. Однако в многонуклонной системе, представляющей ядро и налетающую частицу, в принципе возможна генерация большого числа промежуточных состояний [144], что превращает описание ядерной реакции в сложную задачу. Более рациональный путь заключается в том, чтобы рассмотреть некоторые эффекты многотельного окружения посредством модификаций нуклон-нуклонного (NN) взаимодействия, используемого затем в моделях ядерных реакций. При этом хорошо известно, что, например, поляризационные данные определяются в первую очередь спиновой зависимостью NN -взаимодействия и

представляют собой самый верный путь для исследования спиновой части NN -амплитуды. Переходы с возбуждением состояний нормальной четности чувствительны в первую очередь к изоскалярному, независимому от спина, и к спин-орбитальному компонентам взаимодействия. А высокоспиновые, особенно так называемые растянутые (*stretched*) переходы с возбуждением состояний аномальной четности, чувствительны к спин-орбитальному и ко всем тензорным компонентам эффективного взаимодействия.

Для того чтобы облегчить представление указанной выше сложной многотельной проблемы, проявления, связанные с окружением нуклонов, формально вводятся в эффективное NN -взаимодействие. В этом случае отличие этого взаимодействия от первоначальных свободных NN -сил увеличивается по мере возрастания ядерной плотности. При этом все сводится к эффективному, зависящему от плотности NN -взаимодействию, которое затем и используется в упрощенной трактовке процессов ядерных реакций. В итоге удастся рассмотреть целый ряд явлений, связанных с ядерной средой, чему и было уделено большое внимание, в частности, в работе автора [1].

Условно можно выделить, как следует из предыдущих лекций, две главные модели нуклон-ядерного взаимодействия: нерелятивистскую и релятивистскую. В связи с этим отметим, что и в макроскопической феноменологии, например, включающей методы связанных каналов, наряду с традиционными вычислениями, основанными на уравнении Шредингера, в равной степени возможно применение формализма, базирующегося на уравнении Дирака [71, 76]. В последнем случае используется релятивистская оптическая модель. При этом скалярный потенциал U_S и векторный потенциал U_V рассматриваются тем же самым способом, что и центральный потенциал в уравнении Шредингера. Более того, U_S , U_V , а также тензорный компонент U_T представляют собой комплексные потенциалы, действительные и мнимые части которых также аппроксимируются формами Вудса-Саксона. Деформации этих потенциалов, как обычно, вызывают неупругое рассеяние. Спин-орбитальный член, который вводится в нерелятивистской трактовке дополнительно, в формализме Дирака появляется естественным образом. Даже было бы неправильно или невозможно сделать расчеты без него, в отличие от нерелятивистского формализма [71].

Релятивистские подходы могут сводиться к дираковской феноменологии, о которой только что шла речь, но могут также привести и к релятивистскому импульсному приближению. Тогда эффективное взаимодействие включает релятивистские эффекты.

Этим мы кратко напомнили положения, детально изложенные в предыдущих лекциях, для того чтобы более ясно представить нижеследующее.

В качестве потенциала прямого взаимодействия нуклонов часто используется эффективное двухнуклонное взаимодействие в ядерной материи. Тогда в рассеянии применим подход, аналогичный теории Бракнера-Хартри-Фока (Brueckner–Hartree–Fock, или сокращенно BHF) для ядерной материи. Известно, что эта теория строится на бракнеровской G -матрице. Однако существует и релятивистское продолжение теории Бракнера, которое также становится общепринятым методом для изучения ядерной материи. Это релятивистское расширение, основанное на уравнении Дирака, для одночастичного движения в ядерной материи известно как теория Дирака-Бракнера (Dirac–Brueckner–Hartree–Fock – DBHF) (см., в частности, [144–146]). Сущность последних указанных работ состоит в том, чтобы эффективное взаимодействие в ядре, содержащее релятивистские эффекты, применить к процессу (p, p') -рассеяния. (Заметим для ясности, что выделенное жирным шрифтом p для краткости заменяет $\vec{p}$, т.е. обозначает поляризованные протоны.)

В методе Дирака-Бракнера среднее ядерное поле характеризуется сильными, конкурирующими компонентами – скалярным и векторным, оба из которых ответственны за связь нуклонов в ядре и большую величину спин-орбитального расщепления, встречающегося для ядерных состояний. Очень важным обстоятельством является то, что в рассматриваемой схеме эффективное нуклонное взаимодействие включает в себя

плотностную зависимость, обусловленную релятивистскими эффектами, даже без включения традиционной блокировки Паули или дисперсионной коррекции. Доминирующий эффект релятивистской плотностной зависимости является эквивалентным включению короткодействующего отталкивательного вклада в действительное центральное взаимодействие. Этот вклад пропорционален плотности и почти не зависит от энергии (см., например, [106]).

Мы сравниваем результаты анализа (p, p') -рассеяния с возбуждением низколежащих ядерных состояний в полумикроскопических подходах в рамках метода искаженных волн для двух моделей NN -взаимодействия: нерелятивистского и релятивистского. Подобное сравнение было начато в работе [145], где выяснилось, что при $E_p \sim 200$ МэВ расчетные данные анализирующей способности $A(\theta)$ в релятивистском подходе обнаруживают сильно заниженные значения по сравнению с нерелятивистскими расчетами для углов рассеяния $\theta > 45^\circ$. Однако, как легко видеть из [145], в области углов $\theta > 40^\circ$ для неупругих возбуждений в ядре ^{28}Si не было систематических экспериментальных измерений, которые бы помогли выяснить предпочтение одного или другого аналитического подхода.

В связи с этим были использованы дополненные, как это сделано в [1], и расширенные в область $\theta > 40^\circ$ данные (p, p') -рассеяния с возбуждением тех же состояний в ядре ^{28}Si с $E_p = 180$ МэВ. При этом были выполнены независимо и другие (нерелятивистские) расчеты, чтобы сравнить их с релятивистскими [145] и заново оценить возможности двух теоретических схем. Разумеется, что наиболее достоверные выводы можно сделать для сильно возбуждающегося состояния 2_1^+ , так как систематизированные данные по рассеянию электронов в этом случае обладают наивысшим качеством, а формфакторы электронного рассеяния измерены до $q = 3$ фм $^{-1}$, и, следовательно, переходные плотности являются наиболее реалистичными [147]. А эти переходные плотности как раз использовались в одних и других расчетах.

Сопоставление расширенных экспериментальных данных по (p, p') -рассеянию с расчетами в рамках двух теоретических схем производится здесь на рис. 1. Сравнительный теоретический анализ для возбуждения сильнейшего состояния 2_1^+ было целесообразно выполнить одновременно с анализом упругого рассеяния на том же ядре ^{28}Si , поскольку диапазон измерений для упругого рассеяния был в [1] также расширен (до углов, превышающих 60°). Действительно, требовалось расширение упругого рассеяния еще и потому что сопоставляемые расчеты тоже включают оба типа взаимодействия (релятивистское и нерелятивистское) при использовании фолдинг-модели, основанной на упругом рассеянии.

Сравнения релятивистских и нерелятивистских расчетных данных неупругого рассеяния с поверхностным возбуждением состояния 2_1^+ (рис. 1) и упругого рассеяния [145] при $E_p = 180$ МэВ для ядра ^{28}Si дают нам возможность сделать общий для этих процессов вывод. Так, по мере увеличения углов релятивистские расчеты $A(\theta)$ в обоих случаях рассеяния (неупругого и упругого) смещаются в область отрицательных значений, тогда как нерелятивистские расчеты, наоборот, – в область положительных величин. Результаты анализа упругого и неупругого рассеяния (с возбуждением коллективного состояния 2_1^+ в ^{28}Si) подтверждаются и аналогичными расчетами для ядра ^{40}Ca , для которого также рассматривается упругое и неупругое рассеяние с поверхностным возбуждением сильных коллективных уровней 3_1^- и 5_1^- [145].

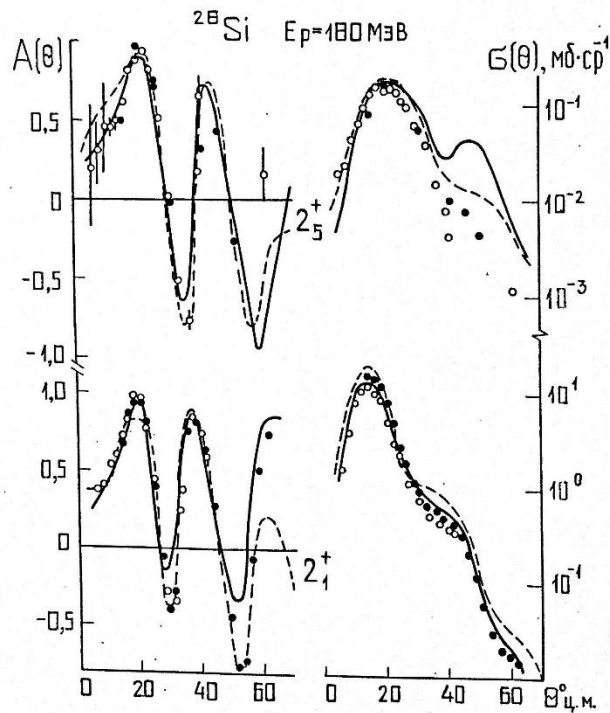


Рис. 1. Сравнение экспериментов (светлые точки [45, 147] и темные точки [1]) и двух полумикроскопических расчетов — нерелятивистского [1] (сплошные кривые) и релятивистского [145] (штриховые кривые), выполненных в рамках МИВ для поверхностного (2_1^+) и внутреннего (2_5^+) возбуждений в ^{28}Si при $E_p = 180$ МэВ. Рисунок взят из работы автора [1]. В обоих теоретических подходах (релятивистском и нерелятивистском) использован первый порядок фолдинг-модели для получения искажений во входном и выходном каналах, а также для образования переходных формфакторов. Для обоих типов расчетов (двух видов кривых, соответственно) применены одинаковые переходные зарядовые плотности. Результаты по электронному рассеянию получены из нескольких источников и наиболее полно систематизированы в [147, 45]. Для выполненных автором и его сотрудниками нерелятивистских расчетов, приведенных в [1], использована парижско-гамбургская G -матрица [57]. Как можно установить из сравнения рисунка с результатами [145], в демонстрируемом комплексном анализе важную роль играют дополнительные экспериментальные результаты (темные точки), полученные с использованием пучков поляризованных протонов, ускоренных на циклотроне Индианского университета (США) при участии автора настоящих лекций. Из рисунка также ясно, что несмотря на заметные расхождения в расчетах двух моделей (нерелятивистской и релятивистской), они все же в целом «замечают» главную особенность эксперимента. А она состоит в том, что в эксперименте достаточно ясно различаются два типа возбуждения: поверхностного (2_1^+) и внутреннего (2_5^+). Характер возбуждений надежно установлен из рассеяния электронов. В итоге для двух случаев возбуждения эксперимент (p', p) характеризуется разной крутизной спада дифференциальных сечений $\sigma(\theta)$ и разной частотой осцилляций угловых распределений анализирующей способности $A(\theta)$. При этом несмотря на явные отличия двух модельных расчетов, в целом оба расчета следуют за экспериментом с его основными базовыми свойствами. В нерелятивистских расчетах использовалось взаимодействие, часто обозначаемое как G_{PH} (парижско-гамбургская G -матрица). А для релятивистских расчетов применялось G -матричное взаимодействие типа DBHF.

Что касается дифференциальных сечений $\sigma(\theta)$, то релятивистские расчеты показывают в области главного максимума $\sigma(\theta)$ увеличение по сравнению с экспериментом и с нерелятивистскими расчетами для коллективных неупругих переходов с возбуждением состояния 2_1^+ в ^{28}Si (рис. 1), а также уровней 2_1^+ , 3_1^- и 5_1^- в ^{40}Ca [145]. Завышенными оказываются релятивистские расчеты $\sigma(\theta)$ и для упругого рассеяния на этих ядрах в широком диапазоне углов [145].

Сравнение двух типов расчетов с экспериментом при $E_p = 180$ МэВ рассмотрим более детально. В случае $A(\theta)$ вблизи $\theta = 60^\circ$ релятивистские расчеты демонстрируют очень низкие значения – заметно меньшие, чем показывает эксперимент. Это хорошо видно при возбуждении как состояния 2_1^+ ^{28}Si (рис. 1, штриховая кривая), так и 2_5^+ ^{28}Si (рис. 1, штриховая кривая). Такая же картина наблюдается и для уровней 2_1^+ , 3_1^- и 5_1^- в ^{40}Ca [145]. Слишком заниженные (по сравнению с экспериментом) значения демонстрируют и расчетные данные $A(\theta)$ в области $\theta = 50\text{--}60^\circ$ для обоих этих ядер (^{28}Si и ^{40}Ca) в случае упругого рассеяния, где вычисления производятся в рамках фолдинг-модели на основе того же самого релятивистского NN -взаимодействия [145]. Отмеченный недостаток релятивистского подхода носит вполне определенный, систематический характер, хотя и нерелятивистские расчеты имеют свои несовершенства. Об этом, например, свидетельствует неудовлетворительное описание формы $\sigma(\theta)$ для внутреннего возбуждения 2_5^+ (рис. 1, сплошная кривая), причем также при углах $\theta > 40^\circ$. Заниженные (по сравнению с экспериментом) релятивистские расчеты $A(\theta)$ в области $\theta \sim 60^\circ$, отмеченные выше для ядер ^{28}Si и ^{40}Ca , можно наблюдать и в ядре ^{16}O при $E_p = 200$ МэВ. Это особенно наглядно видно в случае упругого рассеяния (фолдинг-модель), а также для неупругого рассеяния с возбуждением уровней 1_1^- и 3_1^- [145].

Для состояний с $I^\pi = 5^-$ релятивистский анализ выполнен в [145] только в ядре ^{40}Ca , где указанное занижение расчетов по сравнению с экспериментом также наблюдается в области $\theta = 50^\circ$. С применением нерелятивистского подхода аналитическая картина меняется, но при этом расчетные результаты, наоборот, переоценивают экспериментальные данные в этой области углов, т. е. показывают завышенные значения [145]. Измерения $A(\theta)$ для $I^\pi = 5^-$ в ^{28}Si не являются пока достаточно полными, чтобы проводить подобные оценки. Но при возбуждении состояния 4_1^+ ^{28}Si в области $\theta = 60^\circ$ для $E_p = 180$ МэВ релятивистские расчеты также недооценивают экспериментальные данные $A(\theta)$, а нерелятивистские расчеты скорее снова их переоценивают, что видно из работы [145].

Микроскопический анализ в рамках релятивистского и нерелятивистского импульсного приближения был выполнен при возбуждениях состояний 5_1^- , а также 6_1^- ($T = 0$) и 6_1^- ($T = 1$) в ^{28}Si для $E_p = 500$ МэВ, где изучались различные характеристики (p, p') -рассеяния [148]. В итоге из сравнения двух теоретических подходов с экспериментом авторы делают вывод, что в этих случаях практически нельзя выделить общего преимущества одного типа расчетов по сравнению с другим [148]. Действительно, использование для получения искажающих оптических потенциалов фолдинг-модели, либо феноменологической модели может приводить даже к большим неопределенностям, чем те различия, которые возникают между релятивистскими и нерелятивистскими расчетами.

В рассматриваемом детально примере возбуждения двух разных состояний 2^+ , а именно: 2_1^+ и 2_5^+ в ^{28}Si (рис. 1), также в целом непросто выделить явное общее преимущество одного аналитического подхода перед другим. Однако, несмотря на различия расчетов, связанных с двумя моделями NN -взаимодействия, можно тем не менее

однозначно дифференцировать два разных типа перехода: поверхностный (2_1^+) и внутренний (2_5^+). Для первого характерна большая частота осцилляций $A(\theta)$ и большая крутизна спада $\sigma(\theta)$. А для второго, наоборот, – меньшая частота осцилляций $A(\theta)$ и меньшая крутизна спада $\sigma(\theta)$. Все эти особенности в целом выражаются как в эксперименте, так и в обоих типах расчетов.

При уменьшении энергии протонов до $E_p = 135$ МэВ мы продолжили наблюдать для переходов 2_1^+ и 2_5^+ в ^{28}Si по существу ту же самую картину, причем как в эксперименте, так и в нерелятивистских расчетах, аналогичных тем, что выполнены нами при 180 МэВ (см. [1]). Более того, данные (p, p') -рассеяния при $E_p = 135$ и 180 МэВ удастся совместить и соответственно представить единым образом в виде зависимостей $A(\theta) \cdot \sigma(\theta)$. Кроме того, и в эксперименте, и в нерелятивистских расчетах можно ясно выделить поверхностные или околоповерхностные возбуждения (2_1^+ , 2_2^+ , 2_4^+), с одной стороны, и внутренние или объемные возбуждения (2_3^+ , 2_5^+) в ^{28}Si – с другой.

Наконец, сильные различия в крутизне спада угловых распределений $\sigma(\theta)$, например для состояний 2_1^+ и 2_5^+ в ^{28}Si , хорошо видны и в случае низких энергий протонов ($E_p \approx 26$ МэВ). Это следует из [1]. Здесь также экспериментальные [151] и, соответственно, расчетные [1] данные $\sigma(\theta)$ можно приписать поверхностным и внутренним возбуждениям в согласии с зарядовыми переходными плотностями. В представленных расчетах использовано эмпирическое эффективное протон-ядерное (нерелятивистское) взаимодействие, установленное в результате подгонки целого ряда неупругих переходов различного типа: поверхностных и внутренних [1].

Итак, в широком диапазоне энергий протонов (от $E_p = 26$ МэВ до 180 МэВ) показаны сходные экспериментальные эффекты неупругого рассеяния. Они в основном подтверждаются в расчетах по МИВ с разным эффективным NN -взаимодействием, полученным теоретическим и эмпирическим способом в нерелятивистской и релятивистской схемах. Кроме того, в этих расчетах использовано два сорта искажений. Один из них основан на фолдинг-модели (в случае промежуточных энергий). Другой сорт искажений построен на воспроизведении упругого рассеяния на том же самом ядре и при тех же самых энергиях, что и в случае неупругого рассеяния (низкие энергии).

Отметим, что потенциалы, полученные из подгонки расчетов к упругому рассеянию, не являются в достаточной степени адекватными при описании неупругих переходов, по крайней мере, начиная с $E_p = 100$ МэВ, а также при больших энергиях [149]. Оптические потенциалы фолдинг-модели имеют отталкивательный внутренний кор, который отсутствует при феноменологической подгонке упругого рассеяния. В нашем примере переходов к состояниям 2_1^+ и 2_5^+ в ^{28}Si как при $E_p = 180$ МэВ, так и 135 МэВ использована фолдинг-модель (для нерелятивистской и релятивистской схем), а для $E_p = 26$ МэВ – феноменологическая модель. Несмотря на различие моделей оптического потенциала, основные плотностные особенности двух разных переходов (поверхностного и внутреннего) отражаются в полумикроскопических расчетах достаточно определенно, не вызывая существенных разногласий. Правда, имеется целый ряд деталей некоторого несоответствия расчетов и экспериментов, о чем частично было сказано выше.

Подчеркнем, что все упомянутые выше нерелятивистские расчеты для промежуточных ($E_p = 135$ и 180 МэВ) и низких ($E_p \approx 26$ МэВ) энергий в случае возбуждения различных состояний 2^+ в ^{28}Si выполнены нами с использованием программы LEA [58]. Однако эта программа имеет не только сильные, но также и некоторые слабые стороны, в частности приблизительный учет обменных процессов. Поэтому в ряде случаев (например, при возбуждении уровней с аномальной четностью 6^- , $T = 0$ и 6^- , $T = 1$), где очень важна

роль обмена, использовалась только программа DWBA-90 [150]. Правда, имеются также и примеры, где применение обеих этих программ практически равноценно. Остановимся на таких примерах.

Сильной стороной программы LEA является высокая точность использования переходной плотности, а слабой стороной — учет обменных процессов в приближении *knock-on*. Вместо антисимметризации общей волновой функции для налетающей частицы и нуклонов мишени в импульсном приближении рассматривается только антисимметризация между налетающим протоном и ударяемым нуклоном. Кроме того, в приближении *knock-on* предполагается, что все обменные члены имеют нулевой диапазон. В рассматриваемой аппроксимации учета обменных явлений, часто обозначаемой в литературе как ZREA (*zero-range exchange approximation*), предполагается, что обменный процесс *knock-on* определяется в основном переданными импульсами, очень близкими к импульсу налетающей частицы. Таким образом, обменное взаимодействие оказывается независимым от переданного импульса (переданный обменный импульс является константой). В итоге обменное взаимодействие сокращается до δ -функции. Затем обмен включается в аппроксимацию псевдопотенциала [58]. По существу, обмен, взятый в виде ZREA, добавляет свою часть эффективного *NN*-взаимодействия к его прямой части. Если это приближение оказывается вполне приемлемым для большинства возбуждений с нормальной четностью, особенно когда $E_p = 100$ МэВ и больше [58], то для переходов с аномальной четностью правильный учет обмена является более серьезной проблемой. Здесь для описания обменной части рассеяния требуется применение так называемого формализма FREA (*finite-range exchange approximation*) [145].

Точные обменные амплитуды в конечном диапазоне (*finite-range*) получены в работе R. Schaeffer (см. [33, 34]), а затем на их основе создана целая серия компьютерных программ DWBA [33, 150]. В них переходы конструируются при помощи набора частично-дырочных амплитуд. Волновые функции входят в расчеты через матричные элементы оператора частично-дырочного возбуждения. Такой формализм позволяет выполнить полные антисимметризованные расчеты, поскольку антисимметризация между налетающей и связанной частицами учитывается полностью. Несоввершенством здесь является то, что простые частично-дырочные описания во многих случаях оказываются недостаточными. В итоге во многих расчетах приходится балансировать между двумя крайностями: достаточно полные переходные плотности при упрощенном механизме обмена, либо не совсем полные волновые функции при более совершенном учете обменных процессов.

Программа LEA построена на фолдинг-модели, в которой рассеивающий потенциал получается путем свертки переходной плотности с эффективным *NN*-взаимодействием. Полученный в итоге эффективный потенциал используется затем для того, чтобы вычислить амплитуду перехода. В этом подходе эффекты окружающей среды определяются при той ядерной плотности, которая оценивается из пространственной координаты налетающей частицы. Но такая теоретическая схема наиболее приемлема для расчетов прямой части рассеяния. Обменные процессы здесь учитываются в приближении ZREA. В этом случае расчеты производятся при условии, как если бы уходящий нуклон был налетающей частицей.

Несмотря на все указанные упрощения, нам в таком подходе [1] удалось описать основные энергетические вариации зависимостей $A(q)$, причем одновременно для состояний с достаточно высокими спинами 4_1^+ и 5_1^- в ^{28}Si , руководствуясь экспериментальными зарядовыми переходными плотностями [147], являющимися фундаментальными характеристиками ядерных возбуждений и независимыми от энергии частиц. В макроскопической же модели, основанной на деформациях, для подобных описаний требуется ввести целый ряд феноменологических параметров. При этом если параметры центральной деформации можно контролировать независимо в других ядерных

процессах, то параметры спин-орбитальной деформации подобному контролю не подлежат и являются чисто свободными в полном смысле этого определения.

Следует отметить, что по мере уменьшения E_p точность описания распределений $A(q)$ падает. Одной из причин этого является усиление роли многоступенчатых процессов (особенно для 4_1^+), которыми в МИВ пренебрегается. Другой причиной служит достаточно грубый учет обменных процессов. Наконец (что касается всех энергий E_p), для возбуждения 5_1^- в ^{28}Si продольный формфактор электронного рассеяния измерен в ограниченном диапазоне (до $q \leq 2 \text{ фм}^{-1}$), а это влечет за собой некоторые неопределенности в получении переходной плотности [147].

Использование нерелятивистских и релятивистских расчетов (см., например, [145]) для ядер ^{12}C , ^{16}O , ^{28}Si и ^{40}Ca ясно показывает, что при $E_p \sim 200 \text{ МэВ}$ наилучшее согласие с экспериментальными данными как в случае $\sigma(\theta)$, так и $A(\theta)$ достигается в области углов $\theta = 15\text{--}40^\circ$, но существенно ухудшается при углах $\theta = 50^\circ$ и больших. Это касается как возбуждений нормальной, так и аномальной четности. Поскольку при углах $\theta \approx 50^\circ$ поперечное сечение падает по меньшей мере на порядок величины ниже максимума, то не ясно, можем ли мы вообще отделить при больших углах неадекватность взаимодействия от неадекватности самой процедуры метода искаженных волн [145].

Такая общая трактовка результатов современного анализа (p, p') -рассеяния [145] полностью согласуется с главной концепцией, развиваемой автором в [1]. Так как, действительно, в настоящее время мы можем достигнуть адекватного описания анализирующей способности и дифференциального сечения главным образом в области пика последнего, то вполне целесообразно использовать такую характеристику как $A \cdot \sigma$, т. е. произведение анализирующей способности и дифференциального сечения. Именно для этой угловой зависимости, имеющей малые значения вне области главного пика дифференциальных сечений, мы находим, как правило, вполне реалистичные теоретические оценки, отражающие основные плотностные и энергетические особенности переходов.

Особенность функции $A \cdot \sigma$ заключается в следующем. Она, во-первых, определяется величиной A , а следовательно, прежде всего чувствительна к интерференции между амплитудами. Во-вторых, эта функция локализована в области максимума σ . Но именно в области главного пика дифференциального сечения анализирующая способность для состояний нормальной четности характеризуется преобладанием положительных значений, возникающих в результате интерференции между действительным спин-орбитальным и мнимым центральным эффективным взаимодействием (детально см. в [1]).

В заключение кратко отметим некоторые свойства взаимодействия, использованного в так называемых релятивистских расчетах, представленных на рис. 1. При конструировании подобного взаимодействия его создатели отталкивались от нерелятивистского многотельного подхода Бракнера-Хартри-Фока (BNHF) в описании ядерной материи. Затем на основе конструкции BNHF создавалась техника взаимодействия DBNHF путем добавления соответствующего эффекта от сильного релятивистского среднего поля в подходе Дирака-Бракнера к ядерной материи. В результате расчеты, обозначенные на рис. 1 как релятивистские, выполнены с использованием взаимодействия DBNHF, которое можно трактовать как релятивистскую G -матрицу. Детально построение с подходом DBNHF можно ознакомиться в работе [152] с приведенными там ссылками на первоисточники.

Экспериментальные и расчетные эффекты, связанные с вариациями переходной плотности ядерной материи в ^{28}Si для состояний 2_1^+ , 2_2^+ , 2_3^+ , 2_4^+ и 2_5^+ , проявляющиеся в процессе (p, p') -рассеяния, были установлены и опубликованы в работах [45, 145, 147, 153]. Продемонстрированный выше рис. 1 демонстрирует небольшой фрагмент из довольно значительной наблюдаемой картины, характеризующей процесс в целом.

Только что приведенный набор состояний с одинаковыми значениями J^π , но с разными радиальными распределениями переходной ядерной плотности, а следовательно, и с разными радиальными распределениями переходных формфакторов в одном и том же ядре не является исключением и при других J^π и в других ядрах. Похожая ситуация наблюдается, например, для возбуждения трех состояний с $J^\pi = 3^-$ в ядре ^{40}Ca : одна переходная плотность (для 3_1^-) концентрируется на ядерной поверхности, а две другие (для 3_2^- и 3_3^-) характеризуются помимо поверхностной составляющей еще и очень большим вкладом внутри ядра. Отмеченные особенности переходных плотностей ранее были надежно установлены из измерений электронного возбуждения и его анализа (ссылки см. в [1] и [106]). Указанные особенности переходных плотностей в ^{40}Ca нашли свое яркое выражение в процессе (p, p') -рассеяния. Более того, все эти особенности в основном успешно подтвердились в нерелятивистских расчетах как при низких энергиях ($E_p \approx 20$ МэВ) [1]), так и при промежуточных энергиях (318 МэВ) [106].

Как уже отмечалось в начале этой лекции, в нерелятивистском подходе эффективное взаимодействие с ядром может строиться на импульсном приближении (*IA – impulse approximation*) с плотностной коррекцией. Первая ее цель состоит в том, чтобы создать многотельную модификацию короткодействующего двухнуклонного взаимодействия. Вторая задача заключается в том, чтобы организовать для взаимодействия радиальную локализацию, касающуюся модификационной роли ядерной среды. Так, для приведенного выше набора неупругих переходов можно отметить следующее. Те переходы, чьи амплитуды концентрируются на ядерной поверхности, должны быть чувствительными к низкоплотностным свойствам эффективного взаимодействия. В случае же, когда амплитуды перехода сосредоточены внутри ядра, они «вынуждены» быть чувствительными к высокоплотностным свойствам взаимодействия. Именно такой принцип плотностной коррекции применен при нерелятивистском описании, представленном на рис. 1. Указанный механизм коррекции, оформленный математически, был введен в программу LEA Дж. Келли [58] и широко использован в работах [1, 45, 102, 103, 106, 107, 147, 153] и др. В итоге для нерелятивистской модели в расчетах были применены как подход простой импульсной аппроксимации, так и принцип зависимого от плотности *NN*-взаимодействия.

Что касается релятивистского формализма, то в его рамках в работах [154, 70, 135] была разработана модель релятивистской импульсной аппроксимации для нуклон-ядерного рассеяния на базе ковариантной теории мезонного обмена. Эта импульсная аппроксимация в литературе получила краткое обозначение *IA2* (чтобы отличать от более ограниченной конструкции *IA1* [70])). Аппроксимация *IA2* основана на полном наборе операторов *NN*-рассеяния – лоренцевых инвариантов (*Lorentz invariants*, которые в русскоязычной литературе обычно называют «инвариантами относительно преобразований Лоренца»). Во взаимодействии *IA2* нет плотностной зависимости. В дальнейшем в работе [97] была введена такая зависимость в эффективное взаимодействие *IA2*, а также внесены другие дополнения и усовершенствования. В результате использования последнего указанного взаимодействия (с допустимой параметризацией) удалось вполне успешно описать все основные экспериментально наблюдаемые особенности зависимостей дифференциальных сечений и анализирующей способности для всех трех состояний 3^- в ядре ^{40}Ca при $E_p = 200, 318$ и 500 МэВ [97].

Заканчивая этот курс лекций, отметим, что в следующем курсе лекций II мы рассмотрим также и другие поляризационные зависимости, в частности коэффициенты передачи спина (или поляризации) D_{ij} (здесь i характеризует поляризацию налетающего нуклона, а j – поляризацию рассеянного на ядре нуклона.). Такие зависимости можно получить только в довольно сложном эксперименте: при тройном рассеянии неполяризованных протонов или при двойном рассеянии протонов поляризованных.

(Продолжение следует – Курс лекций II)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плавко А.В.* Поверхностные и внутренние возбуждения в легких и средних ядрах при неупругом рассеянии поляризованных протонов низких, средних и промежуточных энергий. Докторская дис. СПб, 2003. 416 с. // <https://www.dslib.net/atom-jadro/>.
Plavko A.V.* ($\vec{p}, \vec{p}'$) Polarization-transfer observables with polarized proton beams: A Review. eprint arXiv: 1701.03582. Cornell University Library, U.S.A. 2017. 63 p. // <https://arXiv:1701.03582> [nucl-th]
2. Ходгсон П.Е. Оптическая модель упругого рассеяния. Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1966. 232 с.
3. Мак-Манус Г. // Современные проблемы ядерной физики. Резерфордская юбилейная междунар. конф., Пер. с англ. М.: Гос. изд. лит. по атомной науке и технике Госкомитета по исп. атомной энергии СССР, 1963. С. 223.
4. Уилкинсон П. // Там же. С. 129.
5. Ходгсон П. // Там же. С. 129.
6. Schwandt P. // AIP Conf. Proceed. No. 97. N.Y.: AIP, 1983, p. 89.
7. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. 664 с.
8. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике: Первая книга, вып. 1 и 2. Пер. с англ. под ред. Я.А. Смородинского. М.: Мир, 1977. 439 с.
9. Гов Х. См. ссылку 4. С. 245.
10. Френч Дж. См. ссылку 4. С. 281.
11. Гольдфарб Л. См. ссылку 4. С. 304.
12. Jastrow R., Harris I. // Nucl. Phys., 1958/59. V. 9, No 3, p. 437.
13. Brown G.E. // Proceed. Phys. Soc., 1957. V. 70 A, Part 5, No. 449, p. 361.
14. Давыдов А.С. Квантовая механика. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963. 748 с.
15. Itoh K., Oyamada M., Torizuka Y. // Phys. Rev. C, 1970. V. 2, No. 6, p. 2181.
16. Ситенко А.Г. Теория ядерных реакций. М.: Энергоатомиздат, 1983. 352 с.
17. Мигдал А.Б. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 432 с.
18. Sherif H. // Nucl. Phys. 1969. V. A 131, No. 23, p. 532.
19. Шифф Л. Квантовая механика. Пер. с англ. М.: Изд. иностр. лит., 1957. 457 с.
20. Мессиа А. Квантовая механика: Том 1. Пер. с англ. под ред. Л.Д. Фаддеева. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. 478 с.
21. Блатт Дж., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. Пер. с англ. М.: Изд. иностр. лит., 1954. 658 с.
22. Престон М. Физика ядра. Пер. с англ. М.: Мир, 1964. 532.
23. Тейлор Дж. Теория рассеяния (Квантовая теория нерелятивистских столкновений). Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 565 с.
24. Бете Г., Морисон Ф. Элементарная теория ядра. Пер. с англ. М.: Изд. иностр. лит., 1958. 356 с.

* В выполнении этих работ неоценимую помощь оказали М.С. Онегин, В.И. Кудряшов (Россия), E.J.Stephenson и P. Schwandt (США).

25. Плавко А.В., Ломбар Р.М., Онегин М.С. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1985. Т. 49, № 1. С. 116.
26. Satchler G.R. // Nucl. Phys. 1964. V. 55, No. 1. p. 1.
27. Satchler G.R. Direct nuclear reactions. N.Y.: Clarendon Press, Oxford University Press, 1983. 833 p.
28. Власов Н.А. Нейтроны. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. 551 с.
29. Buck B. // Phys. Rev. 1963. V. 130, No. 2. p. 712.
30. Chase D.M., Wilets L., Edmonds A.R. // Phys. Rev. 1958. V. 110, No. 5. p. 1080.
31. Мотт Н., Мессси Г. Теория атомных столкновений. Пер. с англ. под ред. Е.Е. Никитина. М.: Мир, 1969. 756 с.
32. Raynal J. // Computing as a language of physics. Vienna: Internat. Atomic Energy Agency, 1972, p. 281.
33. Raynal J. // The structure of nuclei. Vienna: Internat. Atomic Energy Agency, 1972, p. 75.
34. Tomura T. // Rev. Mod. Phys. 1965. V. 39, No. 4, p. 679.
35. Tomura T. // Annual Rev. Nucl. Science. 1969. V. 19, p. 99.
36. Плавко А.В., Камицубо Х., Госсе Ж., Ломбар Р. и др. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1972. Т. 36, № 3. С. 625.
37. Эскюдье Ж.-Л., Госсе Ж., Ломбар Р.М., Майер Б., Тирьон Ж., Камицубо Х., Плавко А.В. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1972. Т. 36, № 1. С. 140.
38. Плавко А.В., Ломбар Р.М., Майер Б., Кудряшов В.И., Госсе Ж. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1975, № 3. С. 606.
39. Остерн Н. // Строение ядра (Сб. обзорн. докл., прочит. на междунар. конфер. по структуре ядра в Канаде в 1960 г.). Гос. изд. лит. в обл. атомной науки и техники, 1962. С. 128.
40. Гриднев К.А., Краснов Л.В., Кухтина И.Н., Лукьянов В.К. и др. Применения метода искаженных волн к прямым ядерным реакциям. Препринт ОИЯИ № 2458. Дубна: ОИЯИ, 1965. 49 с.
41. Де Бенедетти С. Ядерные взаимодействия. Пер. с англ. М.: Атомиздат. 1968. 475 с.
42. Wolfenstein L., // Annual Rev. of Nucl. Science. California, U.S.A., 1956. V. 6, p. 43.
43. Austern N., Blair J.S. // Annals of Physics. 1965. V. 33, No. 1, p. 15.
44. Chen Q. Study of 180 Mev proton inelastic scattering from ^{28}Si and ^{30}Si . Ph.D. dissertation. 1988. Indiana University, Bloomington, U.S.A., No. 47505. 154 p.
45. Мигдал А.Б. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 432 с.
46. Petrovich F., Carr J.A., McManus // Annual Rev. Nucl. Part. Sci, 1986. V. 36, p. 29.
47. Satchler G.R. // Nucl. Phys. 1966. V. 77, No. 3, p. 481.
48. Gray W.S., Kenefick R.A., Kraushaar J.J., Satchler G.R. // Phys. Rev. 1966. V. 142, No. 3, p. 735.
49. Johnson M.B., Owen L.W., Satchler G.R. // Ibid., p. 748.
50. Satchler G.R. // Nucl. Phys. 1966. V. 77, No. 3, p. 481.
51. Love W.G. // Nucl. Phys. 1972. V. A192, No. 1. p. 49.
52. Von Geramb H.V., Amos K.A. // Nucl. Phys. 1971. V. A163, No. 2, p. 337.
53. Petrovich F., Love W.G. // Nucl. Phys. 1981. V. A354, p. 499c.
54. Bertsch G., Borysowicz J., McManus H., Love W.G. // Nucl. Phys. 1977. V. A284, No. 3, p. 399.
55. Love W.G. // The (p,n') reaction and the nucleon-nuclear force (Confer., Colorado, 1979). N.Y.: Plenum Press, 1980, p. 23.

56. Von Geramb H. // AIP Confer. Proceed. No. 97. N.Y.: AIP, 1983, p. 44.
57. Kelly J.J. LEA: Program for linear expansion analysis of nucleon scattering (May 1990 version). University of Maryland, U.S.A., 1990. 86 p. Private communication.
58. Бор О., Моттельсон Б. Структура атомного ядра. Т. 2 Деформация ядер. Пер. с англ. под ред. Л.А. Слива. М.: Мир, 1977. 664 с.
59. Yoshida S. // Proceed. Phys. Soc. 1956. Sect. A. V. 69, part 8, No. 2 440A, p. 668.
60. Князьков О.М. Лекции по теории ядерных реакций. СПб: СПбГУ, 2004. 119 с.
61. Браун Дж. Е., Джексон А.Д. Нуклон-нуклонное взаимодействие. Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1979. 247 с.
62. Raynal J. Private communication.
63. Raynal J. // Phys. Lett. 1987. V. 196 B, No. 1, p. 7.
64. Wells S.P., Wissink S.W., Bacher A. D. et al. // Phys. Rev. C. 1995. V. 52, No. 5, p. 2559.
65. Wells S.P., Wissink S.W. // Phys. Rev. C. 1999. V. 61, p. 014601.
66. Walecka J.D. // Annals of Phys. 1974. V. 83, No. 2, p. 491.
67. Horowitz C.J., Serot B.D. // Nucl. Phys. 1981. V. A368, No. 3, p. 503.
68. Austern N. // See ref. 57, p. 115.
69. Ostenstein N., Wallace S.J., Tjon J.A. // Phys. Rev. 1988. V. 38, No. 5, p. 2272 and p. 2289.
70. De Swiniarski R., Becotly D., Donoghue E. et al. // Phys. Rev. 1990. V. C42, No. 3, p. 1137.
71. Brockmann R., Weise W. // Phys. Rev. 1977. V. C16, No. 3, p. 1282.
72. Arnold L.G. // Phys. Rev. 1979. V. C19, No. 3, p. 917.
73. Kurth L., Clark B.C., Cooper E.D., Hama S. et al. // Phys. Rev. 1994. V. C49, No. 4, p.2086.
74. Jones K.W., Glashausser C., Swiniarski R., Baker F.T. et al. // Phys. Rev. 1994. V. C50, No. 4, p. 1982.
75. De Swiniarski R., Pham D.L., Raynal J. // Phys. Lett. 1988. V. B213, No. 3, p. 247.
76. Дирак П.А.М. Основы квантовой механики. Пер. с англ. Второе изд. М.: Гл. ред. технико-теор. лит., 1937. 320 с.
77. Clark B.C., Hana S., Mercer R.L. // See ref. 57, p. 260.
78. Feshbach H. // See ref. 57, p. 428.
79. Arnold L.G., Clark B.C., Mercer R.L., Schwandt P. // Phys. Rev. 1981. V. C23, No. 5, p.1949.
80. Horowitz C.J. // See ref. 57, p. 329.
81. Schwandt P. // Proceed. of the 1983 RCNP Internat. Sympos. Osaka University. Japan, p.3.
82. Frekers D., Wong S.S.M., Azuma R.E. et al. // Phys. Rev. 1987. V. C35, No. 6, p. 2236.
83. Forest J.L., Pandharipande V.R., Friar J.L. // Phys. Rev. 1995. V. C52, No. 2, p. 568.
84. Foldi L.I. // Phys. Rev. 1961. V. 122, No. 1, p. 275.
85. Bakamjian B., Thomas L.H. // Phys. Rev. 1953. V. 92, No. 5, p. 1300.
86. Savushkin L.N., Marcos S., Quelle M.L. et al. // Phys. Rev. 1997. V. C55, No. 1, p. 167.
87. Brown G.E. // See Ref. 57, p. 389.
88. Xiaofei Z., Jiarong L. // Phys. Rev. 1995. V. C52, No. 2, p. 964.
89. Ray L., Hoffmann G.W. // Phys. Rev. 1985. V. C31, No. 2, p. 538.
90. Serot B.D. // See ref. 57, p. 337.
91. Jaminon M. // See ref. 57, p. 324.
92. Кейн Г. Современная физика элементарных частиц. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 358с.
93. Miller L.D. // Phys. Rev. 1974. V. C9, No. 2, p. 537.
94. Miller L.D. // Phys. Rev. 1972. V. 28, No. 19, p. 1281.
95. Sherif H.S., Sawafta R.I., Cooper E.D. // Nucl. Phys. 1986. V. A449, No. 4, p. 709.

96. Kelly J.J., Wallace S.J. // Phys. Rev. 1994. V. C49, No. 3, p. 1315.
97. Jaminon M., Mahaux C., Rochus P. // Phys. Rev. 1980. V. C22, No. 5, p. 2027.
98. Satchler G.R. // Proceed. Third Internat. Sympos. Madison: The University of Wisconsin Press, 1970, p. 155.
99. Rego R.A. // Phys. Rev. 1991. V. C44, No. 5, p. 1944.
100. Jaminon M. // Phys. Rev. 1982. V. C26, No. 4, p. 1551.
101. Kelly J.J., Feldman A.E., Flanders B.S. et al. // Phys. Rev. 1991. V. C43, No.3, p. 1272.
102. Flanders B.S., Kelly J.J., Seifert H. et al. // Phys. Rev. 1991. V. C43, No. 5, p. 2103.
103. Cheon T. // Phys. Rev. 1988. V. C38, No. 3, p. 1516.
104. Ikebata Y. // Phys. Rev. 1995. V. C52, No. 2, p. 890.
105. Kelly J.J., Boberg P., Feldman A.E., Flanders B.S. et al. // Phys. Rev. 1991. V. C44, No. 6, p. 2602.
106. Seifert H., Kelly J.J., Feldman A.E. et al. // Phys. Rev. 1993. V. C47, No. 4, p. 1615.
107. Shepard J.R., Rost E., Siciliano E.R., McNeil J.A. // Phys. Rev. 1984. V. C29, No. 6, p. 2243.
108. Hama S., Clark B.C., Cooper E.D. et al. // Phys. Rev. 1990. V. C41, No. 6, p. 2737.
109. Amorim A., Santos F.D. // Phys. Rev. 1991. V. C44, No. 4, p. 2100.
110. Cooper E.D., Clark B.C., Kozack R. et al. // Phys. Rev. 1987. V. C36, No. 5, p. 2170.
111. Kozack R., Medland D.G. // Phys. Rev. 1990. V. C39, No. 5, p. 1461.
112. Jaminon M. // Phys. Lett. 1982. V. 1163, No. 2, 3, p. 87.
113. Horowitz C.J. // Phys. Lett. 1982. V. 1175, No. 3, 4, p. 153.
114. Meyer H.O., Schwandt P., Moake G.L., Singh P.P. // Phys. Rev. 1981. V. C23, No. 2, p. 616.
115. Murdock D.P., Horowitz C.J. // Phys. Rev. 1987. V. C35, No. 4, p. 1442.
116. Shepard J.R., McNeil J.A., Wallace S.J. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50, No. 19, p.1443.
117. McNeil J.A., Shepard J.R., Wallace S.J. // Ibid., p. 1439.
118. Rost E., Shepard J.R., Siciliano E.R., McNeil J.A. // Phys. Rev. 1984. V. C29, No. 1, p. 209.
119. Shepard J.R. // See ref. 57, p. 288.
120. Meyer H.O., Schwandt P., Abegy R. et al. // Phys. Rev. 1988. V. C37, No. 2, p. 544.
121. Arnold L.G., Clark B.C. // Phys. Lett. 1979. V. 848, No. 1, p. 46.
122. Brown G.E., Sethi A., Hintz N.M. // Phys. Rev. 1991. V. C44, No. 6, p. 2653.
123. Arndt R.A., Roper L.D., Bryan R.A. // Phys. Rev. 1983. V. C28, No. 1, p. 97.
124. Bjorken J.D., Drell S.D. Relativistic quantum mechanics. N.Y., San Francisco, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, 1964, p. 291.
125. Miller L.D., Green A.E.S. // Phys. Rev. 1972. V. C5, No. 1, p. 241.
126. Brockmann R. // Phys. Rev. 1978. V. C18, No. 3, p. 1510.
127. Jaminon M., Mahaux C., Rochus P. // Phys. Rev. 1981. V. A365, No. 3, p. 371.
128. Ottenstein N.A., Sabutis J., Wallace S.J. // Phys. Rev. 1987. V. C35, No. 1, p. 369.
129. Chen B.Q., MacKellar A.D. // Phys. Rev. 1995. V. C52, No. 2, p. 878.
130. Shepard J.R., Rost E., Cheung C.-Y., McNeil // Phys. Rev. 1988, V. C37, No. 3, p.1130.
131. Kim H., Horovitz C.J., Frank M.R. // Phys. Rev. 1995. V. C51, No. 2, p. 792.
132. Cooper E.D., Clark B.C., Hama S., Mercer R.L. // Phys. Lett. 1988. V. B206, No. 4, p. 588; Erratum 1989. V. B220, p. 658.
133. Furnstahl R.J., Serot B.D. // Nucl. Phys. 2000. V. A671, No. 1–4, p. 447.
134. Furnstahl R.J., Wallace S.J. // Phys. Rev. 1993. V. C47, No. 6, p. 2812.
135. Bjorken J.D., Drell S.D. Relativistic Quantum Fields. McGraw-Hill Book Company, U.S.A., 1965, 365 p.

136. Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1972. 397 с.
137. Sherif H.S., Cooper E.D., Sawafra R.J. // Phys. Lett. 1985. V. 158B, No. 3, p. 193.
138. Thies M. // Phys. Lett. 1968. V. 166B, No. 1, p. 23.
139. Feshbach H. // See ref. 57, p. 428.
140. Horowitz C.J., Iqbal // Phys. Rev. 1986. V. C33, No. 6, p. 2059.
141. Колоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. Пер. с англ. М.: Мир, 1972. 292 с.
142. Бор О., Моттelson Б. Структура атомного ядра Том. 1 (Одночастичное движение). Пер. с англ. М.: Мир, 1971. 456 с.
143. Sammarruca F., Stephenson E.J. // Phys. Rev. 1998. V. C58, No. 1, p. 307.
144. Sammarruca F., Stephenson E.J., Jiang K. // Phys. Rev. 1999. V. C60, p. 064610.
145. Sammarruca F., Stephenson E.J., Jiang K. et al. // Phys. Rev. 1999. V. C61, p. 014309.
146. Chen Q., Kelly J.J., Singh P.P. et al. // Phys. Rev. 1990. V. C41, No. 6, p. 2514.
147. Donoghue E., Glashauser G., Hintz N. et al. // Phys. Rev. 1991. V. C43, No. 1, p. 213.
148. Hintz N.M., Cook D., Gazzaly M., Franey M.A. et al. // Phys. Rev. 1988. V. C37, No. 2, p. 692.
149. Raynal J. Computer code DWBA-90 (1990) and DWBA-91 (1991) / Report No. NEA 1209/02 (private communication).
150. Zalmstra J.J.A., Harakeh N.V., van Heinen J.F.A. // Nucl. Phys. 1991. V. A526, No. 1, p. 59.
151. Rapp R., Machleidt R., Durso J.W., Brown G.E. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82, No. 9, p. 1827.
152. Plavko A., Onegin M., Kudriashov V., Olmer C., Bacher A., Schwandt P., Stephenson E. // AIP Confer. Proceed., No. 339. N.Y.: AIP, 1995, p. 581.
153. Tjon J.A., Wallace S.J. // Phys. Rev. 1987. V. C36, p. 1085.