**ОСНОВЫ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО И РЕЛЯТИВИСТСКОГО**

**ФОРМАЛИЗМА В РАССЕЯНИИ ПРОТОНОВ НА ЯДРАХ**

**А.В. Плавко[[1]](#footnote-1)\***

Email: [anatoliplavko@gmail.com](mailto:anatoliplavko@gmail.com)

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ I (ОНЛАЙН)**

**Часть Б: Типы эффективных ядерных потенциалов**

**РАЗДЕЛ 5**

**Соотношения между формализмом уравнения Шредингера и уравнения Дирака**

В своих исследованиях мы в значительной степени базируемся на рассеянии электронов как на одном из важных инструментов для получения характеристик ядерной структуры. Из-за того что в этом случае фундаментальное взаимодействие, построенное на обмене фотоном, понято достаточно хорошо, становится возможным сконцентрировать основное внимание на аспектах ядерной структуры. При этом удается избежать осложнений, что невозможно при использовании ядерных частиц, где мы имеем дело с значительными неопределенностями механизма ядерной реакции. Кроме получения достоверной информации о ядерной структуре, что важно само по себе, электронное рассеяние служит также для калибровки рассеяния на ядрах других частиц (в частности адронов). В последних случаях многие аспекты фундаментального взаимодействия становятся гораздо более сложными и являются менее изученными. Как отмечается многими исследователями, вообще является достаточно полезным установить соотношения между сильными (адронными) и слабыми взаимодействиями налетающих частиц, зондирующих ядерную структуру, хотя это и довольно трудная задача.

Обычно из рассеяния электронов на ядрах извлекаются зарядовые плотности основных состояний, а также зарядовые переходные плотности различных возбужденных уровней. Затем в нерелятивистских подходах осуществляется процедура свертки соответствующих плотностных функций, извлеченных из электронного рассеяния, с эффективным *NN*-взаимодействием. Само взаимодействие устанавливается тем или иным способом, в том числе из экспериментов по рассеянию протонов.

Некоторые из используемых переходных плотностей (или их функций) характеризуются своей доминирующей ролью на поверхности ядра (при разреженной ядерной материи), а другие переходные плотности определяются в первую очередь внутри ядра, т.е., наоборот, в области насыщенной ядерной материи. В результате наличия тех или иных структурных особенностей проявляется плотностная чувствительность эффективного протонно-ядерного взаимодействия, поскольку последнее «включается» при различной плотности ядерной материи.

Большинство достаточно успешных расчетов по рассеянию нуклонов основывается, как уже отмечалось, на приближении локальной плотности (обозначаемом в англоязычной литературе сокращением LDA). При этом применяется, в частности, эффективное взаимодействие, базирующееся на *G*-матрице бракнеровского типа, конструируемой для бесконечной ядерной материи. В этом случае во взаимодействие включаются коррекции плотностной зависимости, обусловленные принципом Паули и некоторыми другими эффектами ядерной среды (см., например, [58]).

В релятивистском представлении обсуждаемая протонно-ядерная система должна рассматриваться, строго говоря, в рамках релятивистской квантовой теории поля взаимодействующих нуклонов и мезонов или, в конечном счете, в терминах кварков и глюонов посредством квантовой хромодинамики. Подход, основанный на релятивистской квантовой теории, можно считать успешно и разносторонне развивающимся (см., например, [67, 68, 80–87]). Однако следование по пути квантовой хромодинамики, хотя и наиболее привлекательно в теоретическом плане, является довольно сложным с точки зрения конкретных расчетов и практической реализации, что видно, например, из [88, 89].

Для того чтобы установить связь с упрощенными нерелятивистскими теориями рассеяния и в то же время ввести некоторую степень лоренцевой инвариантности, в ряде исследований конструируют полурелятивистское уравнение движения для системы *р*–*А* (см. [90]). При этом мишень *А* представляется нерелятивистским объектом, а налетающий протон *р* описывается однотельным дираковским гамильтонианом. Тогда полурелятивистское уравнение движения в случае пренебрежения кулоновскими силами приобретает следующий схематический вид:

 (5.1)

Здесь ***α*** и *β* – обычные матрицы Дирака, а *m* – масса протона, что находится в полном совпадении с символами уравнения (4.2). В выражении (5.1) *υpi* обозначает взаимодействие между налетающей частицей *р* и нуклоном мишени *i*,  – нерелятивистский многотельный гамильтониан ядра-мишени.

При решении обсуждаемого полурелятивистского уравнения (5.1) предполагается, что налетающая частица и нуклоны мишени различаются, так что общая волновая функция *Ψ* может быть факторизована в виде произведения четырехкомпонентной волновой функции Дирака для налетающей частицы и нерелятивистской многотельной волновой функции для ядра-мишени в шредингеровском представлении.

Как известно, уравнение движения в нерелятивистской теории дает только одну волновую функцию системы. Однако применение релятивистского уравнения Дирака с включением частиц, имеющих спин 1/2, приводит уже к системе волновых функций. В соответствии с тем, что входящие в релятивистское (4.2) или полурелятивистское (5.1) уравнения матрицы Дирака ***α*** и *β* являются четырехмерными матрицами, то и волновые функции *Ψ*, например, в (5.1), могут иметь четыре компонента [15]. При этом в случае выполнения некоторых условий допускается сокращение числа компонентов волновой функции, что будет обсуждаться в дальнейшем.

Конечно, можно сближать или, наоборот, удалять друг от друга две позиции в анализе ядерной материи: нерелятивистскую и релятивистскую. Однако при этом сохраняется важная отличительная особенность двух рассматриваемых моделей. Так, традиционный (нерелятивистский) подход к ядерной структуре включает взаимодействие нуклонов посредством статических потенциалов. А важным достоинством предложений в рамках релятивистской теории поля является в первую очередь то, что мезонные степени свободы включаются явно как динамические координаты (см., например, [91]).

Как уже отмечалось, фундаментальной характеристикой подхода, основанного на уравнении Дирака, является то, что все потенциалы должны быть выбраны так, чтобы они отвечали лоренцевой инвариантности. Структура уравнения Дирака, записанного в полном виде, достаточно сложна, что можно видеть в работах [78, 90, 92] и др. Однако оптическая дираковская модель часто ограничивается только двумя главными потенциалами, как это уже демонстрировалось выше, в уравнении (4.2). Один из потенциалов, *Us*(*r*), преобразуется подобно лоренцеву скаляру, а другой, *Uv*(*r*) ≡ *U*0(*r*), подчиняется преобразованию как временной компонент 4-вектора (см. [15, 42, 78, 80, 92, 93] и др.). При этом, как уже подчеркивалось, *Us*  и *Uv* – большие величины во внутренней части ядра (несколько сотен МэВ) и противоположные по знаку. В (4.2) кулоновский потенциал *UC* обычно определяется из экспериментальной зарядовой плотности ядра [78].

Принципиальным ограничением формализма, представленного уравнением (5.1), является нерелятивистская трактовка ядра-мишени. По существу, один из нуклонов описывается гамильтонианом Дирака, а другой (в двухтельной подсистеме рассеяния *р*–*А*) рассматривается нерелятивистским образом. Поэтому для того чтобы в вычисляемых величинах при сравнении их с экспериментом в процессе (*р*–*А*)-рассеяния выявить возможные релятивистские аспекты ядра-мишени, авторы работы [90] заменили нерелятивистскую волновую функцию ядра-мишени на релятивистскую. Из релятивистской волновой функции основного состояния ядра авторами той же работы конструировался соответствующей оптический потенциал, который затем и был введен в уравнение движения.

Известно, что вообще в релятивистском движении Дирака состояния движения частицы выражаются четырехкомпонентной функцией (дираковским спинором) [15, 20]. Так, и в работе [90] уравнение Дирака в случае упругого (*р*–*А*)-рассеяния включает четырехкомпонентную волновую функцию бомбардирующего протона. Решение этого уравнения вместе с асимптотическими граничными условиями указанной волновой функции позволили установить амплитуду (*р*–*А*)-рассеяния, из которой и были сконструированы наблюдаемые величины упругого рассеяния.

В релятивистской квантовой механике разработан специальный формализм, касающийся построения волновых функций уравнения Дирака [15, 20, 42]. Так, определенные элементы структуры волновых функций связываются с конкретными физическими явлениями. При рассеянии нуклона (в том числе протона) на четно-четных ядрах, предпочтительно в случаях замкнутых оболочек (и особенно для *N* = *Z*), решения релятивистских уравнений типа (4.2) существенно упрощаются из-за центральной симметрии потенциальной энергии [15, 94, 95 и др.]. Тогда волновая функция в (4.2) сведется к построению дираковского спинора типа

 (5.2)

В соответствии со своим положением в столбце (5.2) его составляющие часто называются верхними () и нижними () компонентами дираковской волновой функции *ψ*(***r***) ≡ *ψD*(***r***) (см., например, [78]). Тогда уравнение Дирака (4.2), как уже отмечалось, эквивалентно двум связанным уравнениям, соответственно для верхнего и нижнего компонентов дираковской волновой функции *ψ D* [78].

Фактически во всех публикациях верхний компонент дираковской функции *ψD* в общем трактуется как схожий с соответствующей волновой функцией шредингеровского типа. Однако нижний компонент дираковской волновой функции совершенно отличен от волновой функции Шредингера.

Для того чтобы сравнить результаты оптической модели, основанной на уравнении Дирака, с результатами оптической модели, базирующейся на уравнении Шредингера, обычно выполняют преобразование уравнения Дирака, приводя его к другой форме. Процесс подобного преобразования продемонстрирован в работах [78, 80]. Так, если пренебречь относительно малыми вкладами в уравнение (4.2), то окажется, что мы в первую очередь придем к уравнению только с верхним компонентом волновой функции Дирака  Это в основном связано с тем, что для нуклон-ядерного рассеяния две составляющие волновой функции, а именно  и , можно считать, соответственно, большой и малой [92]. В итоге такого приближения получается уравнение релятивистского происхождения, но шредингеровского типа со спиновыми операторами Паули (4.2а) [47, 78, 80, 92]:

 (5.3)

Здесь *ψS* – новая волновая функция, где индекс *S* указывает на принадлежность к уравнению типа Шредингера. Эта функция связана с приведенным выше верхним компонентом дираковской волновой функции следующим соотношением [78]:

 (5.4)

Коэффициент *K*(*r*), в принципе, представляет собой сложное (интегральное) выражение внутри ядра [78, 92], но с очень простым асимптотическим поведением: *K*(*r*) → 1, когда *r* → ∞. Это обусловлено тем, что коэффициент *K*(*r*) определяется потенциалами релятивистских полей, входящих в уравнение (4.2). Но так как эти поля имеют конечный диапазон, волновые функции  и *ψS* приобретают одинаковое асимптотическое поведение. Также фазовые смещения упругого рассеяния, определенные из первоначального уравнения Дирака (4.2), являются подобными тем, что вычисляются из уравнения (5.3), имеющего форму уравнения Шредингера.

Все это позволяет трактовать члены *U* и *Us*0 уравнения (5.3) как соответствующие эффективные (центральный и спин-орбитальный) потенциалы традиционного уравнения Шредингера (см. раздел1). В то же время эти эффективные потенциалы конструируются из скалярных (*Us*) и векторных (*Uv* ≡ *U*0) компонентов релятивистских полей, входящих в уравнение (4.2). Таким образом, рассматриваемые эффективные потенциалы представляются вполне подходящими для сопоставления результатов нерелятивистской и релятивистской оптической модели [80, 96].

Разумеется, что все обсуждаемые модельные построения требовали практической проверки путем сопоставления с соответствующими экспериментальными данными, что многократно и осуществлялось. Это было необходимо, в частности, потому что расчеты с эффективным оптическим потенциалом шредингеровского типа (5.3), основанного на релятивистском уравнении Дирака (4.2), не являются полностью эквивалентными тем вычислениям, которые достигаются с самим уравнением Дирака (4.2). Дело в том, что искаженные волны, представленные теперь функцией *ψS* и генерируемые эффективным оптическим потенциалом в (5.3), становятся равными верхнему компоненту дираковской волновой функции  только в асимптотическом пределе (5.4). Во внутренней части ядра коэффициент *K*(*r*) в выражении (5.4) представляет собой, что уже отмечалось, сложную редукцию указанных волновых функций движения частицы [78, 92]. Кроме того, как мы поясним ниже, эффективные оптические потенциалы *U* и *Us.o.* в уравнении (5.3), формально приведенном к шредингеровскому типу, в свою очередь значительно отличаются от обычно используемых оптических потенциалов в традиционном уравнении Шредингера для того же одночастичного движения. Тем не менее, даже эти достаточно заметные различия альтернативных потенциалов, как оказывается, приводят лишь к относительно малым расхождениям многих расчетных наблюдаемых величин в упругом рассеянии. Это происходит потому, что здесь в обоих случаях генерируются главным образом фазово-эквивалентные асимптотические волновые функции. Однако соответствующие волновые функции внутри ядра являются действительно сильно различными во величине и фазе. А такое внутреннее различие уже может проявиться в неупругом рассеянии и в аналогичных расчетах для таких реакций, как, например, (*p*, *n*) или (*p*, 2*p*), которые необязательно локализуются на поверхности ядра.

Вещественные части оптического потенциала традиционного шредингеровского уравнения (1.24) будем для определенности называть в соответствии с их формой потенциалами Вудса–Саксона (ВС – см. раздел 1). А вещественную часть эффективного потенциала релятивистского уравнения Шредингера (5.3) уже нельзя подогнать сходным образом. Но эту часть потенциала, согласно [82], можно заменить эмпирической конструкцией, состоящей из двух частей. Одна из них (притягивающий потенциал) имеет форму ВС, а другая часть (отталкивающий потенциал) построена на иной геометрии, в общем не совместимой с формой ВС.

Следуя этому подходу, вещественную часть центрального оптического потенциала, обозначенного в (5.3) символом *U*, можно аппроксимировать ее феноменологическим эквивалентом [82]:

 (5.5)

где *n* = 1 или 2. Указанные здесь функции *f*1 и *f*2 имеют сходный тип. В принципе, обе функции выражают радиальную часть плотности ядра в основном состоянии с теми или иными параметрами.

Кроме модификации параметров распределения ВС, в (5.5) присутствует также и квадратичная зависимость формфакторов ВС, обеспечивающая отталкивающий член оптического потенциала. Представленная здесь нерелятивистская феноменология позволяет, как мы увидим ниже, в значительной степени имитировать оптический потенциал релятивистской модели.

Мы уже демонстрировали некоторую роль релятивизма, проявляющуюся в описании волновой функции рассеиваемого протона (5.2, 5.4). При обсуждении полурелятивистского уравнения движения (5.1) мы также указывали на возможные эффекты релятивизма и в волновой функции мишени. В конечном счете подобные эффекты отражены в формуле (4.1). Если же в этой формуле допустить существенное упрощение и предположить равенство

 (5.6)

то это будет означать, что мы пренебрегаем нижними компонентами волновой функции типа (5.2), но теперь уже характеризующей описание ядра мишени (см., в частности, [90]). Строго же говоря, в полной релятивистской модели основное состояние мишени представляется четырьмя ядерными плотностями, если при этом нейтроны и протоны рассматриваются по отдельности (см. [80, 90] и др.).

Выражение (5.3) является лишь одним из способов приведения (в сокращенном виде) уравнения Дирака (4.2) к типу уравнения Шредингера. В литературе существует целый набор выражений, частично сходных с (5.3), а частично варьирующихся в зависимости от степени приближения подобного преобразования, способов представления уравнения Дирака и Шредингера, а также других факторов.

В приведенном уравнении Дирака (4.2) релятивистские потенциалы ограничены лишь двумя членами: лоренцевыми скалярным и векторным потенциалами. Существует два наиболее распространенных способа их получения. Один из них заключается в том, что параметры этих оптических потенциалов, имеющих в принципе тот же тип формфакторов, что и нерелятивистские потенциалы, устанавливаются, как уже отмечалось, путем подгонки расчетных результатов к экспериментальным данным для дифференциальных сечений и анализирующей способности в упругом рассеянии протонов. Это было вполне успешно осуществлено, например, в работах [71, 76, 83]. Другой тип получения скалярного и векторного потенциалов основан на различных подходах в рамках релятивистской импульсной аппроксимации с применением *NN*-взаимодействия (представленного в терминах лоренцевой инвариантности) и с включением основного состояния ядра – см. формулу (4.3), а также публикации [47, 70, 82, 90, 97] и др.

Релятивистское уравнение Дирака, как правило, является более полным по сравнению с уравнением Шредингера, поэтому приведение первого уравнения к «эквивалентному» уравнению шредингеровского типа практически всегда связано с операцией сокращения, т.е. отбрасывания тех или иных компонентов уравнения Дирака. Обычно пренебрегают теми компонентами, которые в рассматриваемых случаях можно предполагать малыми, а это уже зависит от конкретного изучаемого процесса. В связи с этим преобразование одного вида уравнения в другой связано с рядом оценочных факторов. Так, конструирование уравнения шредингеровского типа (5.3) обычно осуществляют, как уже отмечалось, пренебрегая в первую очередь нижними компонентами (на основе предположения их малости) волновой функции одночастичного движения в уравнении Дирака (4.2).

Другой способ трансформации последнего релятивистского уравнения в «эквивалентное» шредингеровское уравнение базируется на применении так называемого представления Фолди–Вутхайзена [15, 98]. В рамках такого подхода также используются только большие компоненты соответствующей волновой функции. Однако, помимо этого, здесь включается еще другое, более существенное ограничение. Его суть состоит в соблюдении следующего неравенства [98]:

 (5.7)

Здесь основные величины те же самые, что и в (4.2), включая *U*0 ≡ *Uv*.

Оба указанных приема в получении релятивистского уравнения Шредингера обеспечивают для центрального члена оптического потенциала *U*, как в уравнении (5.3), наличие линейной зависимости от величины *U*0 (т.е.*Uv*) и *Us*. Кроме того, в обоих типах рассматриваемого преобразования в шредингеровском уравнении появляется член, представляющий собой спин-орбитальное взаимодействие [98]. Этот член, приведенный, например, в выражении (5.3), получается автоматически из уравнения Дирака. Примечательно, что в потенциалах *Us* и *U*0 нет эксплицитной спиновой зависимости и что, согласно [73, 98] и др. работам, эффективный спин-орбитальный потенциал образуется исключительно в результате смешивания потенциалов *Us* и *U*0.

Отметим, кстати, что введение спин-орбитальной части с известной томасовской формой в феноменологический оптический потенциал нерелятивистской теории рассеяния по существу также основывалось на уравнении Дирака. Правда, последнее уравнение вначале применялось для движения электронов, откуда и была взята по аналогии форма спин-орбитальной части одночастичных потенциалов для двух моделей: оптической и оболочечной. Что касается силы и знака этих частей потенциалов, то они в каждом случае подбирались эмпирически (см., например, [99]).

Указанная выше процедура Фолди–Вутхайзена, предназначенная для аппроксимации уравнения Дирака, по существу сводится к тому, что релятивистские эффекты учитываются как поправки [15]. Вообще говоря, эта процедура приводит к правильному построению эквивалентного шредингеровского оптического потенциала. Действительно, она позволяет расщепить дираковский релятивистский потенциал на центральную и спин-орбитальную составляющие, качественно соответствующие стандартным требованиям уравнения Шредингера. Более того, в рамках этого преобразования в эквивалентном шредингеровском потенциале автоматически появляется член, который, в принципе, может быть идентифицирован как поправка Дарвина [15, 78, 80, 98]. В традиционном нерелятивистском подходе ее вводят феноменологически. Всю рассмотренную здесь качественно структуру релятивистского уравнения Шредингера мы проанализируем детально несколько ниже, когда будем использовать более строгую процедуру преобразования уравнения Дирака. Сейчас же только отметим, что преобразование Фолди–Вутхайзена приемлемо в основном только для качественных оценок, поскольку неравенство (5.7) можно принять лишь условно. Это связано с тем, что входящие в него отношения *Us*/*m*, *U*0/*m* внутри ядра нельзя считать малыми (см. [98]).

В простом релятивистском подходе допускаются только два лоренцевых компонента: скалярный и четвертый векторный. В рамках этого подхода можно выделить два основных класса оптических потенциалов. Один из них включает потенциалы, которые зависят только от энергии, а к другому классу принадлежат потенциалы, содержащие зависимости как от энергии, так и от импульса (см. [100]). При усложнении релятивистского нуклон-ядерного взаимодействия допускается увеличение числа лоренцевых компонентов. Кроме того, можно эксплицитно ввести зависимость ядерных полей не только от импульса падающего нуклона *k*, но также и от импульса Ферми *kF* [101]. Напомним, что в этом разделе для всех рассмотрений используется система измерений, в которой *ħ* = *с* = 1, так что импульс частицы *р* и ее волновое число *k* друг с другом совпадают. Величина *kF* (*r*) связана, как известно (см. [1, 8, 23, 59] и др.), с эмпирической ядерной плотностью *ρ*(*r*). Соотношение между *kF* и *ρ* включается, например, в [1], в нерелятивистское *NN*-взаимодействие, а следовательно, и в нерелятивистский оптический потенциал. Конструирование нуклон-нуклонных и нуклон-ядерных сил с учетом зависимости от *kF* в случае нерелятивистского и релятивистского подходов имеет по существу одну и ту же основу [101]: введение приближения локальной плотности (LDA).

Это же самое приближение в работе [101] учитывалось также и в случае преобразования уравнения Дирака в эквивалентное уравнение шредингеровского типа. Адекватность такого превращения контролировалась на основании того, что оптические потенциалы преобразованного уравнения Шредингера и первоначального уравнения Дирака приводили к одним и тем же фазовым смещениям упругого рассеяния. В продолжение этого заметим, что одинаковые фазовые смещения в свою очередь обеспечивают практически однотипные результаты упругого рассеяния. Это отмечалось, в частности, в [1] при рассмотрении нерелятивистских методов описания рассеяния. Там подчеркивалось, что наблюдаемые характеристики упругого рассеяния по существу зависят только от асимптотической волновой функции для рассеянной частицы. Такая зависимость известна из многих примеров анализа рассеяния протонов промежуточных энергий [102, 103]. Из всего сказанного следует, что близость фазовых смещений упругого рассеяния, полученных в двух подходах (дираковского и шредингеровского уравнений), свидетельствует об адекватности преобразования [101] одного оптического потенциала в другой, но еще не доказывает, насколько реалистичны сами эти потенциалы. Достоверность потенциалов, сконструированных любым способом, устанавливается в конечном счете только в результате их использования в расчетах, которые затем сравниваются с экспериментальными данными, особенно связанными со спином. На рассмотрении подобных критериев мы остановимся в дальнейшем более детально.

**РАЗДЕЛ 6**

**О конвертировании релятивистского уравнения**

**в «шредингеровский эквивалент»**

В предыдущем разделе мы уже отметили, что можно выделить по крайней мере две релятивистские модели, позволяющие оценить силы скалярного и векторного потенциалов. Одна из них построена на феноменологическом анализе упругого рассеяния. А другая модель основывается на импульсной аппроксимации с использованием релятивистских *t*-матриц, в построении которых включаются различные типы связи (см., в частности, [104]).

Остановимся вначале на первой модели и рассмотрим конкретные достижения феноменологического поиска оптических потенциалов на основе анализа экспериментов по протон-ядерному рассеянию. Согласно многим исследованиям, целесообразно сосредоточиться главным образом на сферических ядрах-мишенях. Такими, как известно, являются многие четно-четные ядра, у которых замкнуты или почти замкнуты протонные и нейтронные оболочки. По этой причине во многих работах с релятивистской феноменологией используются такие ядра, как 4*He*, 12*C*, 16*O*, 40*Ca*, 90*Zr*, 208*Pb* и др.

Установленные в результате подгонки к эксперименту оптические потенциалы для практического применения должны, как и в случае нерелятивистской феноменологии, также охватывать очень широкий диапазон энергии частиц (в данном рассмотрении – прежде всего протонов). В дальнейшем решение уравнения Дирака (4.2), содержащего скалярный оптический потенциал *Us* и векторный оптический потенциал *Uv*, а также кулоновский потенциал *UC*, позволяет в каждом конкретном случае определить функцию *ψ*, представляющую собой искаженные волны. Следующий шаг обычно состоит в использовании этих искаженных волн для неупругого рассеяния, а также, вообще говоря, и для других реакций типа *A*(*а*, *b*)*C* или даже *А*(*а*, *а' b*)*D*. В частности, это вполне допустимо, например, в случае реакции (*р*, 2*р*). Тогда в результате применения уравнения (4.2) можно получить генерируемые искаженные волны в обоих каналах: входном и выходном [105]:

 (6.1)

Для реакции (*р*, 2*р*) в волновых функциях (6.1) индексы *a* и *b* обозначают протоны. При этом *a* отвечает падающей частице и, соответственно, *a'* и *b* – вылетающим частицам.

С точки зрения распространения релятивистского подхода большой интерес представляют такие реакции, как (*p*, *p'*), (*e*, *e'*), (*p*, 2*p*), (*e'*, *ep*), (*p*, *π*), (*γ*, *π*), (*d*, *d*) и многие другие (см., в частности, [15, 28, 32, 47, 71, 73, 76, 78, 80, 82, 85, 90, 96–110]). Во всех этих исследованиях может использоваться и нередко действительно используется лоренцев 4-векторный (временнóй компонент) и скалярный оптический потенциалы при решении уравнения Дирака (4.2). Однако для того чтобы иметь возможность анализировать такую обширную совокупность реакций в рамках релятивистской модели, необходимо иметь глобальные оптические потенциалы с параметрами, зависимыми от энергии и массового числа. Требуемые оптические потенциалы Дирака должны обеспечить хорошее описание данных упругого рассеяния, в частности, протонов в широком диапазоне энергии (*Е*) и массовых чисел (*А*).

Такие глобальные оптические потенциалы для набора атомных ядер были получены с применением дираковской феноменологии в работе [109]. Как уже предполагалось, эти потенциалы были установлены в результате подгонки расчетов (выполненных в рамках дираковской оптической модели) к экспериментальным данным по упругому рассеянию протонов. Экспериментальные данные были систематизированы авторами в широком диапазоне энергий протонов (от 65 до 1040 МэВ) на основе многочисленных измерений, представленных в литературе. Глобальность подхода заключалась также в проведении интерполяции и экстраполяции полученных потенциалов и в тестировании проведенной процедуры. Представленный в итоге обширный набор параметризованных дираковских потенциалов предназначен для анализа многих реакций, в том числе и указанных выше.

Рассматриваемый подход в получении релятивистских оптических потенциалов принято называть стандартной скалярно-векторной (*SV*) моделью дираковской феноменологии или просто стандартной *SV*-моделью [111, 112]. Для наглядной связи с такой формулировкой нередко скалярный и векторный оптические потенциалы упрощенно обозначают как *S* и *V*, соответственно, [104, 110, 112] или для большей ясности указывают при этом функциональную зависимость: *S* (*r*, *E*) и *V* (*r*, *E*) [109, 111].

Представленные обозначения *S* и *V* используются не только в феноменологических подходах, но также часто применяются и в релятивистских модельных представлениях, например, в так называемой (*σ* + *ω*)-модели (см., в частности, [67, 104]). Цель такого обозначения заключается в том, чтобы максимально возможно продемонстрировать отличие дираковских потенциалов от тех или иных потенциалов шредингеровского типа.

Как уже отмечалось, конвертирование уравнения Дирака (4.2) в уравнение шредингреровского типа (5.3) производится разными способами и с различной степенью приближения. При этом в работе [113] подчеркивается, что потребность в подобной конвертации связана прежде всего с тем, что подавляющее число исследований, особенно эмпирических, выполнено в рамках нерелятивистской оболочечной модели или в рамках нерелятивистской оптической модели. По выражению автора работы [113], в литературе существует ряд различных кандидатов, претендующих на название «шредингеровский эквивалент» усредненного потенциала. Все их многообразие определяется тем, как представлены элементы уравнения (5.3) или аналоги этих элементов.

При конвертировании феноменологического типа уравнения Дирака (4.2) получается, естественно, и феноменологический образец «шредингеровского эквивалента» волнового уравнения (5.3). А компоненты последнего уравнения приобретают ту зависимость от потенциалов *S* и *V*, которая соответствует оптимальной подгонке последних к предоставленной для этой цели всей совокупности экспериментальных данных по упругому рассеянию протонов.

В качестве примера ниже мы приведем конкретизированные потенциалы эффективного уравнения Шредингера. Это уравнение получено в результате превращения уравнения Дирака (4.2) в уравнение второго порядка, согласно работе [109]:

 (6.2)

Как видно из сравнения с выражением (5.3), здесь дается лишь несколько измененная его форма, которая также представляет уравнение, эквивалентное шредингеровскому типу. Сохранены и основные обозначения формулы (5.3). Функция *ψ* в (6.2) по-прежнему характеризует верхний компонент искаженного дираковского спинора, описывающего относительное движение частиц.

Скалярный *Us*≡ *S* и векторный *Uv* ≡ *V* потенциалы, содержащиеся в (4.2), имеют соответствующие формфакторы, как это обозначено в выражениях (4.3) и (4.4). Силы дираковских потенциалов и геометрические параметры их формфакторов в феноменологическом анализе устанавливаются, как уже отмечалось, в результате подгонки к экспериментальным данным упругого рассеяния в процессе решения уравнения (6.2). При этом, как мы уже подчеркивали, потенциалы *S* и *V* включают в себя не только вещественные, но и мнимые части, представляющие поглощение (см., в частности, [80, 81, 104, 109, 111, 112]), т.е.

*S* = *SR* + *i SI*, (6.3)

*V* = *VR* + *i VI*. (6.4)

Наличие указанного поглощения установлено из подгоночной процедуры [84], по существу не отличающейся от той, что давно апробирована в нерелятивистской феноменологии. Структура потенциалов, показанная в формулах (6.3, 6.4), имеет не только эмпирическую основу, но также находит и теоретическую поддержку в рамках (*σ*+*ω*)-модели [114].

В процессе конструирования в рамках дираковской феноменологии [109] в очень широком диапазоне энергий (*Ер* = 65–1040 МэВ) глобальные релятивистские потенциалы, особенно их мнимые составляющие, не могут иметь единой геометрии для формфакторов при всех рассматриваемых значениях *Ер*. Как и в случае нерелятивистской феноменологии, дираковские мнимые части *SI* и *VI*в принципе должны содержать два члена: объемный и поверхностный. Поэтому в случае расширенного интервала *Ер*, рассматриваемого в [109], мнимые части в формулах (4.3) и (4.4) превращаются в двухкомпонентные выражения. Один из компонентов имеет формфактор, представленный симметризованными распределениями Вудса–Саксона, а формфактор другого компонента характеризуется производной от указанного распределения. Последний формфактор, как и в случае нерелятивистского подхода, играет доминирующую роль при низких энергиях. Кроме того, предусматривается возможность введения для различных формфакторов разных геометрических параметров. Силы для объемных и поверхностных членов, аналогично, приобретают независимые значения. Разумеется, что соответствующие силовые и геометрические характеристики также оказываются иными для вещественных частей *SR* и *VR*(6.3, 6.4). С целью практической реализации всей кратко обозначенной здесь подгоночной процедуры в рамках дираковской феноменологии была составлена специальная компьютерная программа [109].

Преобразование уравнения Дирака (4.2) производится, как уже отмечалось, в уравнения второго порядка, представленные выражениями (5.3) и (6.2) или более упрощенными формулами (см. [92, 98, 101, 112]). Как подчеркивается в [112], эти уравнения с точки зрения радиальной формы близки к волновому уравнению движения с релятивистской кинематикой, которое, согласно работе [115], все еще можно считать уравнением шредингеровского типа.

Для выражения членов уравнения (6.2) через потенциалы *S* и *V* создан компьютерный код “Schrödinger equivalent” (см. [116]). В соответствии с работами [78, 109, 116] представим в детализированном виде главные операторы и их составляющие, включенные в уравнение (6.2). Входящие в него потенциалы часто называют потенциалами шредингеровского типа, хотя, строго говоря, название касается только их основных формальных признаков, а по существу потенциалы сохраняют свое релятивистское происхождение. Начнем с потенциала, представленного в (6.2) как *Ucent*, индекс которого означает «центральный» (см. [109, 116]). В работах [78, 80] этому потенциалу присвоено другое название: «эффективный». Кроме того, следует отметить, что авторы работы [112] определение «центральный» дают тому же самому потенциалу, но с коэффициентом, т.е. входящему в уравнение (6.2) произведению 2*ЕUcent*. Все это указывает на то, что в сравнительном формализме пока не выработано единых стандартных определений.

Итак, согласно [109],

 (6.5)

Приблизительное равенство означает, что здесь включены только наиболее важные члены центральной части «эквивалентного» потенциала (см., например, [116]). Однако, если ограничиться лишь рамками *SV*-модели, то в (6.5) можно допустить и точное равенство [109]. Это связано с тем, что опущенные в (6.5) члены касаются относительно малого тензорного потенциала [116]. В более общем (по сравнению с *SV*-моделью) релятивистском подходе все указанные малые члены учтены и детально представлены в центральном оптическом потенциале (см. [78]).

В выражение (6.5), как видно, входит кулоновский потенциал *VC*, но только в «перекрестный» член с участием *V*, т.е. произведение *VC • V*. Этому члену иногда дают отдельное обозначение [112]:

 (6.6)

а также присваивают и специальное название: кулоновская поправка [78]. Вообще говоря, этот член комплексный [78], поскольку входящий в произведение векторный потенциал *V*, как отмечалось, является комплексным. Если же рассматриваются энергии протонов *Ep* ≥ 160 МэВ, то согласно [116], данные упругого рассеяния оказываются малочувствительными ко всем составляющим центрального потенциала, которые определяются кулоновскими силами. В результате этого при достаточных величинах *Ер* такими составляющими потенциала нередко вообще пренебрегают.

Уравнение (6.2) иногда просто называют обычным релятивистским уравнением Шредингера со спиновыми операторами Паули (4.2а) [47]. В этом случае *Ucent* (6.5) трактуют как центральную часть релятивистского оптического потенциала. При этом особо выделяют главные линейные члены выражения (6.5):

 (6.7)

и считают, что при выполнении условия (5.6) величина  (6.7) по существу определяет то же самое, что и центральный компонент традиционного нерелятивистского потенциала обычной оптической модели (см. [47]).

Однако, как видно из (6.5), *Ucent* содержит и другие члены. Согласно [78], их следует рассматривать как релятивистские особенности, полученные в макроскопической оптической модели Дирака. Для того чтобы убедиться, что эти особенности не обусловлены специфическим проявлением макроскопического метода в дираковской феноменологии, обратимся к другому источнику получения релятивистских оптических потенциалов.

Как и фолдинг-модель в случае нерелятивистского подхода, импульсная аппроксимация (наряду с феноменологическим методом) может служить при значительных *Ер* вполне надежной основой для получения оптических потенциалов Дирака. Так, в работе [117] показано, что релятивистская импульсная аппроксимация приводит к хорошему описанию данных упругого рассеяния, особенно их распределений, зависимых от спина. При этом соответствие между расчетом и экспериментом существенно улучшается по сравнению с тем, что обеспечивает аналогичный нерелятивистский подход. Поскольку в этом случае использован разработанный в [118] метод конструирования дираковских оптических потенциалов в рамках импульсной аппроксимации на основе амплитуд свободного *NN*-взаимодействия, то хорошего соответствия между расчетами и экспериментом для (***р***, *р*)-рассеяния следует ожидать только при *Ер* > 300 МэВ. Действительно, такое соответствие в [117] и было достигнуто для *Ер* = 500 и 800 МэВ.

Сейчас для нас наибольший интерес представляет релятивистская фолдинг-модель [117] с точки зрения сравнения ее центрального потенциала с аналогичным потенциалом, выведенным из феноменологии Дирака (6.5). Дело в том, что в работах [117, 118] установлен дираковский эквивалент *tρ*-аппроксимации для получения амплитуд рассеяния. Ранее подобный формализм был выработан в целом ряде исследований (см. [47]) для получения нерелятивистского оптического *tρ*-потенциала. Используя полученные релятивистские инварианты *NN*-амплитуд и привлекая набор измерений по упругому рассеянию электронов, авторы работ [117, 118] смогли сконструировать и сопоставить непосредственно релятивистские и нерелятивистские потенциалы без конвертирования уравнения Дирака в его «эквивалент», обладающий шредингеровской формой.

Теперь мы также можем сравнить два типа релятивистских центральных потенциалов: феноменологический (6.5) и полумикроскопический [117]. Кроме линейной части (6.7), выделенной из феноменологического центрального потенциала (6.5), следует обратить внимание также на наличие в нем квадратичных составляющих:

 (6.8)

Релятивистский эффективный центральный потенциал в его полумикроскопическом виде также содержит аналогичные квадратичные члены, как следует из [117]. В то же время, согласно последней работе, из сравнения релятивистского и нерелятивистского потенциалов ясно, что подобные компоненты отсутствуют в нерелятивистском потенциале. Если обратиться к выражениям (6.3) и (6.4), то станет очевидным, что через посредничество квадратичных членов *S*2 и *V*2, как подчеркивается в [78], происходит смешивание вещественных и мнимых частей оптического потенциала.

Из выражения (6.5) следует, что в центральный потенциал входит еще и дарвиновский член, обозначаемый обычно как *UD* или *UDarwin*. Выше мы уже указывали на наличие такого компонента релятивистского потенциала. Из сравнения полумикроскопических релятивистского и нерелятивистского потенциалов, полученных в [117], видно, что компонент *UD* появляется естественным образом в первом случае и отсутствует во втором. Вообще говоря, дарвиновский член оказывается нелокальным [78].

Для того чтобы определить компонент *UD*, нам потребуется ввести довольно универсальное выражение, которое будет играть существенную роль и в дальнейшем формировании другого очень важного элемента оптического потенциала: спин-орбитальной составляющей. Это выражение следующее [78, 109]:

 (6.9)

где обозначения *m* и *E* остаются теми же самыми, что и в формулах (4.2, 5.1, 5.3, 6.2, 6.5, 6.7, 6.8). Другие символы также сохраняются неизменными по сравнению с выражениями (6.3–6.8). В связи с этим следует заметить, что в ранней публикации по этой же теме [73] обозначение *A*(*r*) относилось только к числителю в формуле (6.9). Правда, чтобы избежать двусмысленного толкования в работах [96, 98] указанному числителю формулы (6.9) приписывается другой символ – *D*(*r*). Отметим еще, что всему выражению (6.9) часто дается также и другое обозначение – *B*(*r*) (см. [80, 117, 119]). По поводу фигурирующего здесь кулоновского потенциала *VC* следует подчеркнуть, что в некоторых обсуждаемых формулах он присутствует, как, например, в (6.9), а в других случаях им пренебрегают [119].

Что касается проявления величины *A*(*r*) (6.9), то оно заключается в том, что значение *A*(*r*) служит важнейшим элементом, из которого состоит перенормировочный коэффициент *K*(*r*) в формуле (5.4). Эта формула, как уже отмечалось, модифицирует волновую функцию уравнения шредингеровского типа относительно верхней (большой) составляющей волновой функции уравнения Дирака. Согласно работам [78, 80, 119, 120],

 (6.10)

что представлено на основе выражения (6.9), в котором произведена перегруппировка составляющих его членов и опущен кулоновский потенциал *VC*. Из (6.10) ясно, что демонстрируемый там фактор, входящий в *K*(*r*), стремится к единице на больших расстояниях от центра ядра. К каким же последствиям внутри ядра сводится роль этого фактора, мы обсудим в дальнейшем. Сейчас же отметим только, что формулы (5.4) и (6.10) действительно подкрепляют высказанное ранее утверждение, что при *r* → ∞ верхние компоненты одночастичной волновой функции Дирака в общем-то являются подобными соответствующей волновой функции «эквивалентного» уравнения Шредингера.

Но главная физическая суть величины *A*(*r*), представленной выражением (6.9), состоит в том, что именно величина *A*(*r*) является одним из важнейших элементов, обеспечивающих связь верхнего и нижнего компонентов одночастичной волновой функции Дирака (5.2), как показано в работах [78, 120]. Кроме того, *A*(*r*) представляет собой непосредственный перенормировочный коэффициент для нижних (малых) компонентов волновых функций связанного состояния при сопоставлении двух формализмов (релятивистского и нерелятивистского), что приобретает важнейшее значение для описания рассеяния электронов [108]. По этому случаю еще раз подчеркнем, что наиболее продуктивный аналитический метод, предлагаемый нами, в частности в [1], состоял именно в комбинации рассеяния протонов и электронов.

После того как мы в общих чертах познакомились с физической ролью величины *A*(*r*), продемонстрируем использование этой величины для конструирования различных компонентов оптического потенциала. Так, в макроскопическом подходе, согласно [78, 109, 116], дарвиновский () и спин-орбитальный компоненты оптического потенциала приобретают следующий вид:

 (6.11)

 (6.12)

Последнее выражение является приблизительным, поскольку в нем опущен относительно малый член, определяемый тензорным потенциалом (его роль показана в [78]). В феноменологическом анализе представленный в (6.9) вклад кулоновского потенциала *VC* в выражение *A*(*r*) оценивается как малый. Поэтому этим потенциалом часто в формулах для *UD* и *Us.o.* практически пренебрегают [80, 116, 119]. Следует еще подчеркнуть, что в других подходах выражения для *UD* и *Us.o.* приобретают заметно отличный вид по сравнению с (6.11) и (6.12), при этом достаточно сильные расхождения наблюдаются также в случае *Ucent*(см., в частности, [73, 80, 96, 98, 112, 117]). Для подобных расхождений имеется, как уже отмечалось, целый ряд причин. Версия релятивистских потенциалов, сконструированных по шредингеровскому образцу, не является однозначной и единственной. Уравнение Дирака (4.2) и дифференциальное уравнение второго порядка (6.2), хотя и приводят к сопоставимым фазовым смещениям упругого рассеяния, не обладают точно эквивалентными потенциалами из-за специфических отличительных свойств этих уравнений (см., например, [121]).

Однако, несмотря на все указанные неоднозначности, ясно выделяется следующее обстоятельство. Так, расхождения «эквивалентных» шредингеровских потенциалов, полученных в эмпирическом и теоретическом анализах, действительно оказываются вполне заметными. Речь идет о вещественных оптических потенциалах при упругом рассеянии протонов с энергией около 180 МэВ на ядре 40*Ca* [101]. В то же время вся совокупность этих результатов, основанных на релятивистском формализме, в целом особенно резко контрастирует с вещественным потенциалом, установленным для аналогичного случая в рамках традиционного нерелятивистского подхода (см. [73]).

Релятивистский потенциал *V* представляется отталкивающим, каковым бы он являлся, если бы происходил от обмена нейтральным векторным мезоном. При этом потенциал *S* считается притягивающим, поскольку трактуется как возникающий из-за обмена нейтральным скалярным мезоном. В связи с этим два этих потенциала в принципе гасят друг друга при формировании линейной части эффективного центрального потенциала (6.7). В то же время, согласно выражению (6.9), оба рассматриваемых потенциала (*V* и *S*), наоборот, складываются, усиливая друг друга в спин-орбитальном (6.12) и дарвиновском (6.11) потенциалах (см., в частности, [73, 120]).

Однако, несмотря на то, что разные компоненты релятивистского оптического потенциала различаются комбинациями образующих потенциалов *V* и *S*, имеется и главное единое свойство членов оптического потенциала. Оно заключается в том, что все компоненты оптических потенциалов конструируются из одних и тех же элементов: *V* и *S*. Таким образом, релятивистский подход совершенно определенно демонстрирует фундаментальную связь между центральным и спин-орбитальным эффективными потенциалами [80, 122]. В то же время спин-орбитальный потенциал и компоненты центрального потенциала, как известно, трактуются в нерелятивистском подходе как вполне независимые.

Все основные положения, сформулированные выше, касаются прежде всего макроскопических моделей, использованных в рамках дираковской и шредингеровской феноменологии. Однако оказывается, что сделанные здесь заключения являются также справедливыми и в случае полумикроскопической фолдинг-модели, когда осуществляется свертка *NN*-взаимодействия с соответствующими ядерными плотностями [117]. Тогда для релятивистского подхода центральный и спин-орбитальный потенциалы конструируются по определенному образцу: на базе одних и тех же двух ядерных плотностей. Это векторная плотность, устанавливаемая из упругого рассеяния электронов, и скалярная плотность, не имеющая нерелятивистского аналога (4.1). В ядрах эти две плотности можно считать приблизительно равными (5.6).

В аналогичной полумикроскопической модели центральный и спин-орбитальный потенциалы можно сравнивать друг с другом и в нерелятивистском подходе. Здесь выясняется наличие отличительных конструктивных особенностей [117].

Сопоставление полученных в [117] выражений для полумикроскопического центрального и спин-орбитального потенциалов в нерелятивистском и релятивистском подходах, а также сравнение выполненных расчетов с соответствующими данными упругого рассеяния позволяет сделать вывод об определенных релятивистских и нерелятивистских эффектах. На этих вопросах мы еще остановимся в дальнейшем.

Сейчас же, чтобы завершить вопрос о преобразовании уравнения Дирака в «эквивалентное» уравнение шредингеровского типа, мы должны еще остановиться на некоторых характеристиках макроскопических оптических потенциалов, имеющих релятивистское происхождение. В частности, следует дать формулировку общей релятивистской энергии протона *Е* в системе центра масс, состоящей как из протона (масса *m*), так и ядра мишени (масса *M*). Это значение *Е* входит во многие приведенные выше формулы, в частности, (5.3, 6.2, 6.5, 6.7–6.12). Оно определено в работе [116] с использованием компьютерной программы “Schrödinger equivalent” и является следующим:

 (6.13)

где *Елаб*– энергия протона в лабораторной системе координат, а индекс в *Ес.ц.м.* относится к системе центра масс. Именно приведенное значение энергии *Е* должно содержаться в дифференциальном уравнении второго порядка для верхних компонентов волновой функции Дирака, характеризующей движение протона.

**РАЗДЕЛ 7**

**Релятивистские и нерелятивистские эффекты в рассеянии протонов**

Центральный оптический потенциал, устанавливаемый из релятивистского подхода, характеризуется прежде всего гашением двух компонентов: *S* и *V*, связанных между собой в той или иной форме. Один из возможных вариантов связи этих компонентов указан в формуле (6.7). В то же время спин-орбитальная составляющая оптического потенциала в соответствии с выражениями (6.12) и (6.9) определяется формой типа

*Us.o.* ~ *d* (*V* – *S*) / *dr*. (7.1)

Итак, спин-орбитальная часть оптического потенциала, в отличие от центральной, характеризуется не гашением, а, наоборот, включением большой по величине когерентной суммы компонентов *S* и *V*. Общей характеристикой рассмотренных частей оптического потенциала является то, что все они зависят от линейной комбинации величин *S* и *V*.

Далее следует подчеркнуть, что шредингеровский тип оптического потенциала, выведенного из уравнения Дирака, демонстрирует прямую связь между спин-орбитальной (6.12, 7.1) и различными центральными частями (6.5, 6.11) этого потенциала. Подобное заключение касается даже такого компонента центральной части потенциала, как кулоновская поправка (6.5, 6.6). Возникающая связь между основными составляющими оптического потенциала, используемого для рассеяния, оказывается проявлением внутренних свойств самой релятивистской модели (см., например, [122]). Для сравнения отметим здесь, что в аналогичных случаях конструирования традиционного нерелятивистского оптического потенциала его спин-орбитальная часть обычно выбирается по аналогии с томасовским членом в атомной физике (см., в частности, [3]). При этом оснований для простой и явной связи между спин-орбитальными и центральными частями оптического потенциала в нерелятивистских феноменологических подходах нет.

Многочисленные исследования показывают, что для нуклон-ядерного рассеяния в области энергии нуклонов, составляющей несколько сотен МэВ, релятивистская феноменология оказывается вполне успешной. Она приводит, как правило, к большим (по абсолютной величине) значениям вещественных составляющих скалярного (*SR*) и векторного (*VR*) потенциалов. Эти составляющие (6.3, 6.4) варьируются в пределах от −300 до −400 МэВ и от 200 до 300 МэВ, соответственно (см., в частности, [123]). Из-за того что скалярный и векторный потенциалы уравнения Дирака являются большими, при преобразовании этого уравнения в уравнение шредингеровского типа возникающая разница нелинейных членов центрального оптического потенциала (6.5, 6.8) оказывается немалой, как справедливо отмечается в [47]. В предельном случае, который реализуется приблизительно при *Ер* = 500 МэВ, специфическая роль релятивизма проявляется особенно четко.

В самом деле, поскольку величины *S* и *V* обладают, вообще говоря, противоположными знаками, то, естественно, следует ожидать, что спин-орбитальный потенциал, по крайней мере в некоторых случаях, может оказаться большим, как это видно из выражения (7.1). В то же время линейная часть центрального оптического потенциала (6.7), наоборот, при определенных условиях должна приобрести в свою очередь малые значения. Выяснилось, что в области *Ер*= 500 МэВ, действительно, сумма скалярного и векторного вкладов в вещественную центральную часть оптического потенциала (6.7) почти исчезает (см., в частности, [123]). В этом случае квадратичные члены релятивистского шредингеровского «эквивалентного» потенциала (6.5, 6.8) доминируют в его вещественной части [123]. Эти квадратичные члены отсутствуют в традиционном нерелятивистском формализме и представляют собой одну из важнейших черт, характеризующих различие между релятивистским и нерелятивистским подходами [47, 123]. Присутствие указанных квадратичных членов в первом подходе может объяснить, в частности, почему релятивизм является особенно важным в некоторых случаях [123].

Гашение векторного и скалярного вкладов в линейную часть оптического потенциала типа (6.7) отмечается и в [117] при *Ер* = 500 МэВ. Это гашение – одно из наиболее выраженных проявлений и релятивистского потенциала, сконструированного на основе процедуры свертки в первом порядке приближения, которое обычно обозначается для краткости символом *tρ*. Этот эффективный релятивистский центральный потенциал значительно отличается от нерелятивистского образца, полученного аналогичным методом [117]. Различие двух потенциалов состоит прежде всего в том, что только в релятивистском потенциале содержатся квадратичные зависимости, представленные следующим его компонентом, указанном в (6.8) в несколько другом обозначении:

 (7.2)

Здесь *VS* и *VV* – скалярный и векторный члены, характеризующие соответствующие линейные составляющие того же релятивистского оптического потенциала. Для его получения была применена дираковская импульсная аппроксимация, в рамках которой указанные скалярный и векторный члены, а также их комбинации полностью определяются *NN*-амплитудами и ядерными плотностями [118]. При этом использованные амплитуды устанавливаются на основе экспериментальных данных по *NN*-рассеянию и приводятся к лоренцовой ковариантной форме, как того требует релятивистский формализм [124]. Полученное таким образом релятивистское *NN*-взаимодействие, а также измеренное при упругом рассеянии электронов протонное зарядовое распределение служат феноменологической базой для конструирования свертки типа *tρ* (4.5) и, следовательно, для образования первого порядка релятивистского оптического потенциала.

Итак, в случаях применения дираковской феноменологии или же релятивистской импульсной аппроксимации получаемые эффективные оптические потенциалы приобретают качественно сходные свойства. Они, в частности, сводятся к тому, что наряду с линейной зависимостью составляющих центрального оптического потенциала, представленного в двух формулировках, неизбежно появляется и квадратичная зависимость тех же составляющих (6.8, 7.2), которая отсутствует в соответствующих нерелятивистских подходах.

Для демонстрации контрастных особенностей эффективных потенциалов, образованных на основе двух формализмов – релятивистского и нерелятивистского, остановимся на некоторых деталях решения приведенных ранее уравнений движения.

Напомним, что при решении уравнения Шредингера обычно используется так называемый метод парциальных волн. Согласно этому методу, для падающей и рассеянной волны производится разложение по парциальным волнам, т.е. по состояниям с определенными значениями переданного орбитального углового момента *l*. Строго говоря, для рассматриваемой системы в квантовой механике состояние с определенным моментом *l* не соответствует какому-либо определенному параметру удара. Однако, если проводить параллель с классической механикой, то рассеяние *l*-го порядка можно связать с частицами, проходящими на расстоянии (параметр удара) от центра сил (см., например, [8]), где

 (7.3)

а *ρ* – импульс частицы. (Здесь по-прежнему используется система отсчета, в которой *ħ*=1).

В таком представлении суперпозиция состояний, отличающихся значением момента импульса (величиной *l*) как раз и служит формой решения, которое ищется для одного уравнения Шредингера либо для связанной совокупности подобных уравнений (3.9).

Вспомним также, что в нерелятивистских подходах часто допускается целый ряд приближений (например, ограничение только локальным взаимодействием и пренебрежение обменными эффектами), в результате чего в волновой функции общей системы удается выделить в виде отдельных множителей части, которые зависят только от углов или только от радиусов, а также от спиновых характеристик. При разложении волновой функции относительного движения по парциальным волнам отдельные слагаемые в формулах типа (3.9) соответствуют состояниям с определенными значениями орбитального момента *l*. В этом случае суммирование по моментам парциальных волн производится одновременно как для радиальной, так и для сферической функции.

В принципе тот же самый формализм разложения применяется и в релятивистском подходе. Отличие последнего заключается по существу лишь в том, что для него характерно, как уже отмечалось, использование так называемого дираковского спинора, состоящего из большого и малого компонентов волновой функции [125]. Только рассматриваемый большой, или верхний компонент, согласно выражению (5.2), можно считать в общем сопоставимым с соответствующей однокомпонентной волновой функцией шредингеровского типа. При этом в дираковской модели структуру, подобную (5.2), приобретают волновые функции, которые характеризуют как связанные состояния, так и континуум [108].

Сейчас нас главным образом интересуют потенциалы протонно-ядерного упругого рассеяния, имеющие релятивистское происхождение, и их основные отличия от традиционных шредингеровских потенциалов. Эквивалентные шредингеровские потенциалы можно считать таковыми, если результаты рассеяния получаются в расчетах фактически одинаковыми как при использовании уравнения Дирака, так и уравнения Шредингера [70]. В связи с этим обсудим применение формализма парциальных волн для релятивистских подходов. В случае рассмотрения сферически симметричного поля, что вполне допустимо при использовании прежде всего ядер с замкнутыми оболочками [126], волновая функция (5.2) может быть разделена на части, зависимые от радиальной координаты, а также от угловых и спиновых переменных [94, 90, 70, 119, 126, 127]. При разложении на парциальные волны релятивистская функция (5.2) принимает форму, которую схематично можно представить следующим образом [94, 90, 70, 127]:

 (7.4)

Здесь *Flj* (*r*) и *Glj* (*r*) с указанными индексами, имеющими в принципе тот же смысл, что и в традиционном нерелятивистском подходе, представляют собой радиальные части верхнего и нижнего компонентов волновой функции. Сферические гармоники  с дополняющими их соответствующими обозначениями характеризуют роль угловых и спиновых степеней свободы. Они являются функциями, зависящими от угловых  и спиновых переменных. Их обычно называют спин-угловыми функциями или сферическими функциями со спином.

Указанные в (7.4) спин-угловые функции можно разделить на части исходя из линейных комбинаций спиновых и сферических функций, обладающих по отдельности более простой зависимостью [15, 119, 127]. Разложение релятивистской волновой функции в выражении (7.4) удается представить при помощи отдельных множителей, включающих радиальные составляющие и обычные сферические функции, а также спиновые волновые функции, при этом последние зависят только от спиновой переменной *μ* [119, 127].

Разделив волновую функцию на радиальную и угловую части, мы в нерелятивистском подходе обычно получаем радиальное и угловое уравнения [20]. Далее, используя хорошо разработанный формализм разложения по парциальным волнам, мы практически сводим задачу о рассеянии к решению только радиального уравнения [34, 21].

Дираковскому уравнению (4.2) обычно удовлетворяет волновая функция *ψ* одночастичного состояния с общей энергией

 (7.5)

Одночастичная энергия  является отрицательной для связанного состояния и положительной в случае состояния рассеяния [98, 113]. В соответствии с этим, как уже отмечалось, дираковская волновая функция может определять либо связанное состояние, либо континуум. В частности, дираковская волновая функция оболочечной модели представляет собой прямое отражение уникальных релятивистских свойств связанных нуклонов в релятивистских трактовках ядерной структуры. При этом предполагается, что волновые функции как начального, так и конечного связанного состояния удовлетворяют тому же самому дираковскому уравнению [108].

Разложение релятивистской ядерной волновой функции мишени на дираковские одночастичные волновые функции для отдельных орбиталей производится также по схеме, представленной выражением (7.4). Снова можно разделить радиальные и спин-угловые функции  Только в этом случае квантовые числа *l* и *j* характеризуют, соответственно, заполнение одночастичных ядерных подоболочек [90]. Символ ***σ*** в (7.4) обозначает обычную спиновую матрицу Паули (4.2a). Радиальные составляющие разложения ядерной волновой функции (7.4) определяют плотностные свойства ядра. Так, ядерные скалярные и векторные плотности, указанные в выражении (4.1), представляют собой комбинации квадратичных зависимостей, образованных из радиальных частей верхнего и нижнего компонентов ядерной волновой функции (см., например, [90]).

Сейчас для нас в первую очередь важно оценить параметры дираковских оптических потенциалов, полученных из подгонки расчетов к экспериментальным данным по упругому рассеянию. В этом контексте обсуждаемые волновые функции *ψ* (5.2, 7.4), конечно, следует рассматривать как искаженные дираковские спиноры, описывающие относительное движение. Тогда эти функции *ψ* должны удовлетворять дираковскому уравнению типа (4.2), содержащему комплексные (скалярный и векторный) оптические потенциалы, а также кулоновский потенциал. Как мы уже отмечали, используемые потенциалы могут быть предсказаны исходя из релятивистских *NN*-амплитуд и ядерных плотностей, либо из подгоночной процедуры в рамках упругого рассеяния. В этом смысле формализм оптического потенциала в своих главных чертах является аналогичным формализму нерелятивистской теории или феноменологии.

Выше мы показали, что дираковское волновое уравнение (4.2) удается приближенно заменить уравнением, обладающим формой шредингеровского типа (5.3, 6.2). В этом случае мы приходим к так называемым шредингеровским эквивалентным потенциалам. Особенно простым физическим смыслом обладают их вещественные составляющие. Действительно, вещественная составляющая эквивалентного шредигеровского потенциала может быть сопоставимой с соответствующей частью эмпирического потенциала традиционной оптической модели в случае положительных значений энергии  (7.5) или, в свою очередь, должна быть приравнена к эмпирическому потенциалу ядерной оболочечной модели для отрицательных значений  (см., в частности, [128]).

Решение уравнения движения Дирака (4.2) производится с использованием разложения по парциальным волнам (см., например, [78]). Аналогичный метод решения связанных уравнений Шредингера мы также использовали выше и демонстрировали в выражении (3.14). По существу, ничего не должно меняться при решении шредингеровского эквивалентного уравнения (5.3, 6.2). Только здесь мы можем ограничиваться лишь верхним (большим) компонентом дираковского спинора (5.2). Правда, этот компонент в случае преобразования уравнения Дирака (4.2) в эквивалентное уравнение Шредингера (5.3) испытывает дополнительную редукцию в соответствии с выражением (5.4).

При решении эквивалентного уравнения Шредингера с использованием метода парциальных волн включается только радиальная волновая функция большого компонента [*F*(*r*)], представленного в формуле (7.4). Указанная в (5.4) редукция относится и к радиальной составляющей *F*(*r*), причем она присутствует в каждой искаженной волне [120]. Радиальная функция с определенным значением орбитального момента *l* удовлетворяет следующему уравнению шредингеровского типа (см., например, [70, 119, 129]):

 (7.6)

Здесь *κ* (*капа*, греч.) конкретизирует значение квантовых чисел *l* и *j*, указанных в общем выражении (7.4), на чем мы детально остановимся ниже.

Радиальное уравнение Шредингера (7.6) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка, и, следовательно, оно имеет два линейно независимых решения, из которых физический смысл приобретает только то, которое обращается в нуль при *r* = 0 (см., например, [24, 15]). Ясно, что при *r* → 0 центробежный член *l* (*l*+1)/r2 должен преобладать над энергетическим компонентом *k*2, а при *r* → ∞ центробежный член, наоборот, стремится к нулю. Поскольку основные потенциалы *V*, входящие в уравнение (7.6), являются в достаточной степени короткодействующими, то при *r* → ∞ радиальная функция ведет себя как решение радиального уравнения для свободного движения [24].

В выражении (7.6) мы используем главным образом обозначения, предложенные в работе [119]. В соответствии с этим

 (7.7)

где *VS* (*r*) и *VV* – скалярный и векторный потенциалы, соответственно. Из сравнения (7.7) с формулой (6.10) видно, что *B*(*r*) совпадает с той частью выражения (6.10), что указана в квадратных скобках. Кроме того, *B*(*r*) отличается от величины *А*(*r*), представленной формулой (6.9), лишь включением в *А*(*r*) дополнительного вклада, связанного с кулоновскими силами. Совершенно очевидно, что для больших значений *r* величина *B*(*r*)→1, при этом уравнение (7.6) с точки зрения своей структуры фактически становится тем же самым, что и традиционное радиальное уравнение Шредингера.

(Продолжение следует)

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Плавко А.В.* Поверхностныеи внутренние возбуждения в легких и средних ядрах при неупругом рассеянии поляризованных протонов низких, средних и промежуточных энергий. Докторская дис. СПб, 2003. 416 с.

[URL: https:/www.dslib.net/atom-jadro](URL://https:/www.dslib.net/atom-jadro)/

1. *Plavko A.V.* () Polarization-transfer observables with polarized proton beams: A Review. eprint arXiv: 1701.03582. Cornell University Library, U.S.A. 2017. 63 p.

URL:<https://arxiv.org/>;<http://portalus.ru/>; https://scirate.com/search?q=au:Plavko\_A+in:nucl-th/

1. Ходгсон Π.Ε. Оптическая модель упругого рассеяния. Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1966. 232 с.
2. *Мак-Манус Г.* // Современные проблемы ядерной физики. Резерфордовская юбилейная междунар. конф., Пер. с англ. М.: Гос. изд. лит. по атомной науке и технике Госкомитета по исп. атомной энергии СССР, 1963. С. 223.
3. *Уилкинсон П.* // Там же. С. 129.
4. *Ходгсон П.* // Там же. С. 129.
5. *Schwandt P.* // AIP Conf. Proceed. No. 97. N.Y.: AIP, 1983, p. 89.
6. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. 664 с.
7. *Фейнман Р*., *Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановкие лекции по физике: Первая книга, вып. 1 и 2. Пер. с англ. под ред. Я.А. Смородинского. М.: Мир, 1977. 439 с.
8. *Гов Х*. См. ссылку 4. С. 245.
9. *Френч Дж*. См. ссылку 4. С. 281.
10. *Гольдфарб Л*. См. ссылку 4. С. 304.
11. Jastrow R„ Harris I. // Nucl. Phys., 1958/59. V. 9, No 3, p. 437.
12. *Brown G.E.* // Proceed. Phys. Soc., 1957. V. 70 A, Part 5, No. 449, p. 361.
13. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963. 748 с.
14. *Itoh K., Oyamada M., Torizuka Y.* // Phys. Rev. C, 1970. V. 2, No. 6, p. 2181.
15. *Ситенко А.Г.* Теория ядерных реакций. М.: Энергоатомиздат, 1983. 352 с.
16. *Мигдал А.Б*. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит, 1983. 432 с.
17. *Sherif H*. // Nucl. Phys. 1969. V. A 131, No. 23, p. 532.
18. *Шифф Л*. Квантовая механика. Пер. с англ. М.: Изд. иностр. лит., 1957. 457 с.
19. *Мессиа А*. Квантовая механика: Том 1. Пер. с англ. под ред. Л.Д. Фаддеева. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. 478 с.
20. *Блатт Дж., Вайскопф В.* Теоретическая ядерная физика. Пер. с англ. М.: Изд. иностр. лит., 1954. 658 с.
21. *Престон М.* Физика ядра. Пер. с англ. М.: Мир, 1964. 574 с.
22. *Тейлор Дж.* Теория рассеяния (Квантовая теория нерелятивистских столкновений). Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 565 с.
23. *Бете Г., Морисон Ф*. Элементарная теория ядра. Пер. с англ. М.: Изд. иностр. лит., 1958. 356 с.
24. *Плавко А*.*В., Ломбар Р.М., Онегин М.С.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1985. Т. 49, № 1. С. 116.
25. *Satchler G*.*R.* // Nucl. Phys. 1964. V. 55, No. 1. p. 1.
26. *Satchler G.R*. Direct nuclear reactions. N.Y.: Clarendon Press, Oxford University Press, 1983. 833 p.
27. *Власов Н*.*А*. Нейтроны. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. 551 с.
28. *Buck B*. // Phys. Rev. 1963. V. 130, No. 2. p. 712.
29. *Chase D*.M. *, Wilets L., Edmonds A.R.* // Phys. Rev. 1958. V. 110, No. 5. p. 1080.
30. *Мотт Н., Месси Г.* Теория атомных столкновений. Пер. с англ. под ред. Е.Е. Никитина. М.: Мир, 1969. 756 с.
31. *Raynal J.* // Computing as a language of physics. Vienna: Internat. Atomic Energy Agency, 1972, p. 281.
32. *Raynal J.* // The structure of nuclei. Vienna: Internat. Atomic Energy Agency, 1972, p.75.
33. *Tomura T.* // Rev. Mod. Phys. 1965. V. 39, No. 4, p. 679.
34. *Tomura T.* // Annual Rev. Nucl. Science. 1969. V. 19, p. 99.
35. *Плавко А.В., Камицубо Х., Госсе Ж. Ломбар Р.* и др.// Изв. АН СССР. Сер. физ. 1972. Т. 36, № 3. С. 625.
36. *Эскюдье Ж.-Л., Госсе Ж., Ломбар Р.М., Майер Б., Тирьон Ж., Камицубо Х., Плавко А.В.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1972. Т. 36, № 1. С. 140.
37. *Плавко А.*В*., Ломбар Р.М., Майер Б., Кудряшов В.И., Госсе Ж.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1975, № 3. С. 606.
38. *Остерн Н.*// Строение ядра (Сб. обзорн. докл., прочит. на междунар. конфер. по структуре ядра в Канаде в 1960 г.). Гос. изд. лит. в обл. атомной науки и техники, 1962. С. 128.
39. *Гриднев К.А., Краснов Л.В., Кухтина И.Н., Лукьянов В.К.* и др. Применения метода искаженных волн к прямым ядерным реакциям. Препринт ОИЯИ № 2458. Дубна: ОИЯИ, 1965. 49 с.
40. *Де Бенедетти С.* Ядерные взаимодействия. Пер. с англ. М.: Атомиздат. 1968. 475 с.
41. *Wolfenstein L*., // Annual Rev. of Nucl. Science. California, U.S.A., 1956. V. 6, p. 43.
42. *Austern N*., *Blair J.S.* // Annals of Physics. 1965. V. 33, No. 1, p. 15.
43. *Chen Q*. Study of 180 Mev proton inelastic scattering from 28Si and 30Si. Ph.D. dissertation. 1988. Indiana University, Bloomington, U.S.A., No. 47505. 154 p.
44. *Мигдал А.Б.* Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 432 с.
45. *Petrovich F.*, *Carr J.A., McManus* // Annual Rev. Nucl. Part. Sci, 1986. V. 36, p. 29.
46. *Satchler G.R.* // Nucl. Phys. 1966. V. 77, No. 3, p. 481.
47. *Gray W.*S*., Kenefick R.A., Kraushaar J.J., Satchler G.R.* // Phys. Rev. 1966. V. 142, No. 3, p. 735.
48. *Johnson M.B., Owen L.W., Satchler G.R.* // Ibid., p. 748.
49. *Satchler G.R*. // Nucl. Phys.1966. V. 77, No.3, p. 481.
50. *Love W.G.* // Nucl. Phys. 1972. V. A192, No. 1. p. 49.
51. *Von Geramb H.V., Amos K.A.* // Nucl. Phys. 1971. V. A163, No. 2, p. 337.
52. *Petrovich F., Love W.G.* // Nucl. Phys. 1981. V. A354, p. 499c.
53. *Bertsch G.*, *Borysowicz J., McManus H., Love W.G.* // Nucl. Phys. 1977. V. A284, No. 3, p. 399.
54. *Love W.G.* // The (p,n’) reaction and the nucleon-nuclear force (Confer., Colorado, 1979). N.Y.: Plenum Press, 1980, p. 23.
55. *Von Geramb H.//* AIP Confer. Proceed. No. 97. N.Y.: AIP, 1983, p. 44.
56. *Kelly J.J.* LEA: Program for linear expansion analysis of nucleon scattering (May 1990 version). University of Maryland, U.S.A., 1990. 86 p. Private communication.
57. *Бор О.*, *Моттельсон Б.* Структура атомного ядра. Т. 2 Деформация ядер. Пер. с англ. под ред. Л.А. Слива. М.: Мир, 1977. 664 с.
58. *Yoshida S.* // Proceed. Phys. Soc. 1956. Sect. A. V. 69, part 8, No. 2 440A, p. 668.
59. *Князьков О.М.* Лекции по теории ядерных реакций. СПб: СПбГУ, 2004. 119 с.
60. *Браун Дж.* *Е., Джексон А.Д.* Нуклон-нуклонное взаимодействие. Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1979. 247 с.
61. *Raynal J.* Private communication.
62. *Raynal J.* // Phys. Lett. 1987. V. 196 B, No. 1, p. 7.
63. *Wells S.*P., *Wissink S.W., Bacher A. D. et al.* // Phys. Rev. C. 1995. V. 52, No. 5, p. 2559.
64. *Wells S.P., Wissink S.W.* // Phys. Rev. C. 1999. V. 61, p. 014601*.*
65. *Walecka J.D.* // Annals of Phys. 1974. V. 83, No. 2, p. 491.
66. *Horowitz C.J., Serot B.D.* // Nucl. Phys. 1981. V. A368, No. 3, p. 503.
67. *Austern N.* // See ref. 57, p. 115.
68. *Ostenstein N.*, *Wallace S.J., Tjon J.A*. // Phys. Rev. 1988. V. 38, No. 5, p. 2289.
69. *De Swiniarski R., Becotty D., Donoghue E. et al. //* Phys. Rev. 1990. V. C42, No. 3, p. 1137.
70. *Brockmann R., Weise W.* // Phys. Rev. 1977. V. C16, No. 3, p. 1282.
71. *Arnold L.*G. // Phys. Rev. 1979. V. C19, No. 3, p. 917.
72. *Kurth L.*, *Clark B.C., Cooper E.D., Hama S. et al.* // Phys. Rev. 1994. V. C49, No. 4, p.2086.
73. *Jones K.*W., *Glashausser C., Swiniarski R., Baker F.T. et al.* // Phys. Rev. 1994. V. C50, No. 4, p. 1982.
74. *De Swiniarski R.*, *Pham D.L., Raynal J.* // Phys. Lett. 1988. V. B213, No. 3, p. 247.
75. *Дирак П.А.М.* Основы квантовой механики. Пер. с англ. Второе изд. М.: Гл. ред. технико-теор. лит., 1937. 320 с.
76. *Clark B.*C*., Hana S., Mercer R.L.* // See ref. 57, p. 260.
77. *Feshbach H.* // See ref. 57, p. 428.
78. *Arnold L.G., Clark B.C., Mercer R.L., Schwandt P.* // Phys. Rev. 1981. V. C23, No. 5, p.1949.
79. *Horowitz C.J.* // See ref. 57, p. 329.
80. *Schwandt P.* // Proceed. of the 1983 RCNP Internat. Sympos. Osaka University. Japan, p.3.
81. *Frekers D., Wong S.S.M., Azuma R.E. et al.* // Phys. Rev. 1987. V. C35, No. 6, p. 2236.
82. *Forest J.L., Pandharipande V.R., Friar J.L.* // Phys. Rev. 1995. V. C52, No. 2, p. 568.
83. *Foldi L.I.* // Phys. Rev. 1961. V. 122, No. 1, p. 275.
84. *Bakamjian B., Thomas L.H.* // Phys. Rev. 1953. V. 92, No. 5, p. 1300.
85. *Savushkin L.N., Marcos S., Quelle M.L. et al.* // Phys. Rev. 1997. V. C55, No. 1, p. 167.
86. *Brown G.E.* // See Ref. 57, p. 389.
87. *Xiaofei Z., Jiarong L.* // Phys. Rev. 1995. V. C52, No. 2, p. 964.
88. *Ray L., Hoffmann G.W*. // Phys. Rev. 1985. V. C31, No. 2, p. 538.
89. *Serot B.D.* // See ref. 57. p. 337.
90. *Jaminin M.* // See ref. 57, p. 324.
91. *Кейн Г.* Современная физика элементарных частиц. Пер. с англ. М.: Мир, 1990.

358 с.

1. *Miller L.D*. // Phys. Rev. 1974. V. C9, No. 2, p. 537.
2. *Miller L.D*. // Phys. Rev. 1972. V. 28, No. 19, p. 1281.
3. *Sherif H*.S., *Sawafta R.I., Cooper E.D.* // Nucl. Phys. 1986. V. A449, No. 4, p. 709.
4. *Kelly J*.*J., Wallace S.J.* // Phys. Rev. 1994. V. C49, No. 3, p. 1315.
5. *Jaminon M., Mahaux C., Rochus P.* // Phys. Rev. 1980. V. C22, No. 5, p. 2027.
6. *Satchler G.R.* // Proceed. Third Internat. Sympos. Madison: The University of Wisconsin Press, 1970, p. 155.
7. *Rego R.A.* // Phys. Rev. 1991. V. C44, No. 5, p. 1944.
8. *Jaminon M.* // Phys. Rev. 1982. V. C26, No. 4, p. 1551.
9. *Kelly J.J., Feldman A.E., Flanders B.S. et al.* // Phys. Rev. 1991. V. C43, No.3, p. 1272.
10. *Flanders B.S., Kelly J.J., Seifert H. et al.* // Phys. Rev. 1991. V. C43, No. 5, p. 2103.
11. *Cheon T.* // Phys. Rev. 1988. V. C38, No. 3, p. 1516.
12. *Ikebata Y.* // Phys. Rev. 1995. V. C52, No. 2, p. 890.
13. *Kelly J.J., Wallace S.J.* // Phys. Rev. 1994. V. C49, No. 3, p. 1315.
14. *Seifert H., Kelly J.J., Feldman A.E. et al.* // Phys. Rev. 1993. V. C47, No. 4, p. 1615.
15. *Shepard J.R., Rost E., Siciliano E.R., McNeil J.A.* // Phys. Rev. 1984. V. C29, No. 6, p. 2243.
16. Hama S., Clark B.C., Cooper E.D. et al. // Phys. Rev. 1990. V. C41, No. 6, p. 2737.
17. *Amorim A., Santos F.D.* // Phys. Rev. 1991. V. C44, No. 4, p. 2100.
18. *Cooper E.D., Clark B.C., Kozack R. et al.* // Phys. Rev. 1987. V. C36, No. 5, p. 2170.
19. *Kozack R., Medland D.G.*// Phys. Rev. 1990. V. C39, No. 5, p. 1461.
20. *Jaminon M.* // Phys. Lett. 1982. V. 1163, No. 2, 3, p. 87.
21. *Horowitz C.J.* // Phys. Lett. 1982. V. 1175, No. 3, 4, p. 153.
22. *Meyer H.O., Schwandt P., Moake G.L., Singh P.P.* // Phys. Rev. 1981. V. C23, No. 2, p. 616.
23. *Murdock D.P., Horowitz C.J.* // Phys. Rev. 1987. V. C35, No. 4, p. 1442.
24. *Shepard J.R., McNeil J.A., Wallace S.J.* // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50, No. 19, p.1443.
25. *McNeil J.A., Shepard J.R, Wallace S.J.* // Ibid., p. 1439.
26. *Rost E., Shepard J.R., Siciliano E.R., McNeil J.A.* // Phys. Rev. 1984. V. C29, No. 1, p. 209.
27. *Shepard J.*R. // See ref. 57, p. 288.
28. *Meyer H.*O., Schwandt P., Abegy R. et al.// Phys. Rev. 1988. V. C37, No. 2, p. 544.
29. *Arnold L.G., Clark B.C.* // Phys. Lett. 1979. V. 848, No. 1, p. 46.
30. *Brown G.E., Sethi A., Hintz N.M.* // Phys. Rev. 1991. V. C44, No. 6, p. 2653
31. *Arndt R.A., Roper L.D., Bryan R.A*. // Phys. Rev. 1983. V. C28, No. 1, p. 97.
32. *Bjorken J*.*D., Drell S.D.* Relativistic quantum mechanics. N.Y., San Francisco, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, 1964, p. 291.
33. *Miller L.D., Green A.E.S.* // Phys. Rev. 1972. V. C5, No. 1, p. 241.
34. *Brockmann R.* // Phys. Rev. 1978. V. C18, No. 3, p. 1510.
35. *Jaminon M.*, Mahaux C., Rochus P. // Phys. Rev. 1981. V. A365, No. 3, p. 371.
36. *Ottenstein N.A., Sabutis J., Wallace S.J.* // Phys. Rev. 1987. V. C35, No. 1, p. 369.

1. \* Докторский диссертационный совет по физике при Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого. [↑](#footnote-ref-1)