ОДНО ПРИЛОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ СТИРЛИНГА ВТОРОГО РОДА

Сухов Виктор Борисович (cyhob@yandex.ru) Версия от 10.09.2017

Приводится доказательство одной формулы на стр. 157 [2].
Ключевые слова: числа Стирлинга второго рода, частные производные от произведения независимых переменных.

Доказательство формулы на стр. 157 [2]

T1 Если $y = x_1{\cdot}x_2{\cdot}\ldots{\cdot}x_n$, то

$$\frac{\partial^n F(y)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = \sum_{k=1}^{n} \mathscr{S}(n, k)\cdot y^{k-1}\cdot F^{(k)}(y),$$

где $\mathscr{S}(n, k)$ — числа Стирлинга 2-го рода.

◀ $$\frac{\partial(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)}{\partial x_i} = \prod_{k=1}^{i-1} x_k \cdot \prod_{k=i+1}^{n} x_k = \prod_{\begin{cases}k=1\\ k\neq i\end{cases}}^{n} x_k = \left\{ x_i \neq 0 \right\} = y/x_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)}{\partial x_1} = F^{(1)}(x_1{\cdot}x_2{\cdot}\ldots{\cdot}x_n)\cdot x_2{\cdot}\ldots{\cdot}x_n = F^{(1)}(x_1{\cdot}x_2{\cdot}\ldots{\cdot}x_n)\cdot x_1^{\,0}\cdot x_2{\cdot}\ldots{\cdot}x_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(F^{(1)}(y)\cdot x_2{\cdot}\ldots{\cdot}x_n\right) = F^{(2)}(y){\cdot}x_1{\cdot}x_2{\cdot}x_3^2{\cdot}\ldots{\cdot}x_n^2 + F^{(1)}(x_1{\cdot}x_2{\cdot}\ldots{\cdot}x_n){\cdot}x_3{\cdot}\ldots{\cdot}x_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3 F(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(F^{(2)}(y){\cdot}x_1{\cdot}x_2{\cdot}x_3^2{\cdot}\ldots{\cdot}x_n^2 + F^{(1)}(y){\cdot}x_3{\cdot}\ldots{\cdot}x_n\right) =$$

$$= F^{(3)}(y){\cdot}x_1^2{\cdot}x_2^2{\cdot}x_3^2{\cdot}x_4^3{\cdot}\ldots{\cdot}x_n^3 + 2{\cdot}F^{(2)}(y){\cdot}x_1{\cdot}x_2{\cdot}x_3{\cdot}x_4^2{\cdot}\ldots{\cdot}x_n^2 + F^{(2)}(y){\cdot}x_1{\cdot}x_2{\cdot}x_3{\cdot}x_4^2{\cdot}\ldots{\cdot}x_n^2 +$$
$$+ F^{(1)}(y){\cdot}x_4{\cdot}\ldots{\cdot}x_n) =$$

$$= F^{(3)}(y){\cdot}x_1^2{\cdot}x_2^2{\cdot}x_3^2{\cdot}x_4^3{\cdot}\ldots{\cdot}x_n^3 + 3{\cdot}F^{(2)}(y){\cdot}x_1{\cdot}x_2{\cdot}x_3{\cdot}x_4^2{\cdot}\ldots{\cdot}x_n^2 + F^{(1)}(y){\cdot}x_4{\cdot}\ldots{\cdot}x_n) \Rightarrow\ldots$$

$$\ldots\Rightarrow \frac{\partial^{n-1} F(y)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathscr{S}(n-1, k){\cdot}(x_1{\cdot}x_2{\cdot}\ldots{\cdot}x_{n-1})^{k-1} F^{(k)}(y)\cdot x_n^k =$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^{n} F(y)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n}} = \frac{\partial}{\partial x_n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathscr{S}(n-1, k){\cdot}(x_1{\cdot}x_2{\cdot}\ldots{\cdot}x_{n-1})^{k-1}{\cdot}F^{(k)}(y)\cdot x_n^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathscr{S}(n-1, k)\Big((x_1{\cdot}x_2{\cdot}\ldots{\cdot}x_{n-1})^{k}\cdot x_n^k\ F^{(k+1)}(y) + k{\cdot}(x_1{\cdot}x_2{\cdot}\ldots{\cdot}x_{n-1})^{k-1}\cdot x_n^{k-1}\cdot F^{(k)}(y)\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathscr{S}(n-1, k)\Big(y^k\cdot F^{(k+1)}(y) + k{\cdot}y^{k-1}\cdot F^{(k)}(y)\Big);$$

$j = k + 1 \Rightarrow k = j - 1;\ 1 \leqslant k \leqslant n - 1 \Rightarrow 1 \leqslant j - 1 \leqslant n - 1 \Rightarrow 2 \leqslant j \leqslant n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \mathscr{S}(n-1, k){\cdot}y^k\cdot F^{(k+1)}(y) = \sum_{j=2}^{n} \mathscr{S}(n-1, j-1){\cdot}y^{\,j-1}\cdot F^{(j)}(y) = \left\{ \mathscr{S}(n-1, 0) = 0 \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathscr{S}(n-1, k-1){\cdot}y^{\,k-1} F^{(k)}(y) =$$

$$= \mathscr{S}(n-1, n-1){\cdot}y^{n-1}\cdot F^{(n)}(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathscr{S}(n-1, k-1){\cdot}y^{\,k-1}{\cdot}F^{(k)}(y) =$$

[1] (6.3) стр. 289 $\Rightarrow \mathscr{S}(n, k) = \mathscr{S}(n-1, k-1) + k\cdot\mathscr{S}(n-1, k) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathscr{S}(n-1, k-1) = \mathscr{S}(n, k) - k\cdot\mathscr{S}(n-1, k);$

$\mathscr{S}(n-1, n-1) = \mathscr{S}(n, n) = 1$

$$= \mathscr{S}(n, n)\cdot y^{n-1}\cdot F^{(n)}(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \big(\mathscr{S}(n, k) - k\cdot\mathscr{S}(n-1, k)\big)\cdot y^{k-1}\cdot F^{(k)}(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \mathscr{S}(n-1, k)\big(y^{k}\cdot F^{(k+1)}(y) + k\cdot y^{k-1}\cdot F^{(k)}(y)\big) =$$

$$= \mathscr{S}(n, n)\cdot y^{n-1}\cdot F^{(n)}(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathscr{S}(n, k)y^{k-1}\cdot F^{(k)}(y) - \sum_{k=1}^{n-1} k\cdot\mathscr{S}(n-1, k)\cdot y^{k-1}\cdot F^{(k)}(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} k\cdot\mathscr{S}(n-1, k)\cdot y^{k-1}\cdot F^{(k)}(y) = \mathscr{S}(n, n)\cdot y^{n-1}\cdot F^{(n)}(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathscr{S}(n, k)y^{k-1}\cdot F^{(k)}(y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathscr{S}(n, k)y^{k-1}\cdot F^{(k)}(y) \quad \blacktriangleright$$

Список литературы

[1]. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики.Перевод с английского Походзей Б.Б., Ходулев А.Б. — М.: Мир, 1998. — 703 с.

[2]. Comtet L. Advances combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions. 1974.