

Вычисление специальных определителей

Сухов Виктор Борисович (cyhob@yandex.ru)

Версия от 30.08.2017

Приводится доказательство леммы [1] стр. 30 и некоторые её приложения.

Ключевые слова: определители специального вида, гармонические числа.

Л1 Пусть при $2 \leq i \leq n-1$

$$\Delta'_{n-i+2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha_i & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+\alpha_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix} \text{ и } \Delta'_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_n, \Delta'_1 = 0,$$

тогда

$$\Delta'_{n-i+2} = \alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_n.$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \Delta'_{n-i+2} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha_i & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+\alpha_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\alpha_i & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1+\alpha_i & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+\alpha_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix} = \\ &= \alpha_i \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha_{i+1} & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+\alpha_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_i \Delta'_{n-i+1} = \dots = \alpha_i \dots \alpha_{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix} = \\ &= \alpha_i \dots \alpha_{n-2} \begin{vmatrix} 0 & -\alpha_{n-1} & 0 \\ 1 & 1+\alpha_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_i \dots \alpha_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_i \dots \alpha_{n-1} (1 + \alpha_n - 1) = \alpha_i \dots \alpha_n \blacktriangleright \end{aligned}$$

Л2 При $n \geq 2$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+\alpha_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha_2 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\alpha_i & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1+\alpha_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{s=1}^n \prod_{i=1}^{s-1} \alpha_i \prod_{i=s+1}^n \alpha_i$$

Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \neq 0$, то $\Delta_n = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n (1 + \alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1} + \dots + \alpha_i^{-1} + \dots + \alpha_n^{-1})$
([1] стр. 30).

$$\blacktriangleleft \Delta_{n-i+1} = \begin{vmatrix} 1+\alpha_i & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha_{i+1} & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\alpha_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix}, 1 \leq i \leq n;$$

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1+\alpha_2 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\alpha_i & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1+\alpha_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix} = \\ &= \alpha_1 \begin{vmatrix} 1+\alpha_2 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha_3 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+\alpha_i & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1+\alpha_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix} + \\ &+ \alpha_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha_3 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+\alpha_i & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1+\alpha_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_1 \Delta_{n-1} + \alpha_2 \Delta'_{n-1} = \underbrace{\phantom{\alpha_1 \Delta_{n-1} + \alpha_2 \Delta'_{n-1}}}_{\text{П1}} = \alpha_1 \Delta_{n-1} + \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_1(\alpha_2 \Delta_{n-2} + \alpha_3 \Delta'_{n-2}) + \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n = \alpha_1 \alpha_2 \Delta_{n-2} + \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n + \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n = \\ &= \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_3 \Delta_{n-3} + \alpha_4 \Delta'_{n-3}) + \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n + \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \Delta_{n-3} + \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n + \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_n = \dots \\ &\dots = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1} (\alpha_i \Delta_{n-i+1} + \alpha_{i+1} \dots \alpha_n) + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_n + \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-2} \alpha_i \dots \alpha_n = \dots \\ &\dots = \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{n-2} \Delta_2 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_n + \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-3} \alpha_{n-1} \alpha_n = \end{aligned}$$

$$\underbrace{\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+\alpha_{n-1} & 1 \\ 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix}}_{} = \begin{vmatrix} \alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ 1 & 1+\alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_{n-1} \alpha_n + \alpha_{n-1} + \alpha_n$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n + \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n + \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \dots \alpha_n + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} \alpha_n + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} =$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n + \sum_{s=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \alpha_i ;$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \neq 0 \Rightarrow \Delta_n = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n (1 + \alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1} + \dots + \alpha_i^{-1} + \dots + \alpha_n^{-1}) \blacktriangleright$$

СлЛ1

$$n! = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$$

$$\left\langle \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{vmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+n \end{vmatrix} \right\rangle = \{ \text{Л1} \} = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n! \right\rangle$$

СлЛ2 Формула для гармонических чисел

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$$

$$\left\langle \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{vmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+n \end{vmatrix} \right\rangle = \{ \text{Л2} \} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) = n! H_n \right\rangle$$

Список литературы

- [1]. Егорычев Г.П. Интегральные представления и вычисление комбинаторных сумм. - Новосибирск: Наука, 1977, - 178 с.
- [2]. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Изд. 11-е. -М.: Наука, 1975. -431 с.